MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
JENA

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY
E. HECKE G. HERGLOTZ O. PERRON
W. SÜSS W. THRELFALL H. WEYL

48. BAND 2. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 24. AUGUST 1942)

BERLIN
SPRINGER-VERLAG
1942

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

erscheint in zwanglosen Heften, die zu Bänden von etwa 50 Bogen vereinigt werden.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden natürlich auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich. Weitere 125 Exemplare werden, falls bei Rücksendung der 1. Korrektur bestellt, gegen eine angemessene Entschädigung geliefert. Darüber hinaus gewünschte Exemplare müssen zum Bogennettopreise berechnet werden. Mit der Lieferung von Dissertationsexemplaren befaßt sich die Verlagsbuchhandlung grundsätzlich nicht; sie stellt jedoch den Doktoranden den Satz zur Verfügung zwecks Anfertigung der Dissertationsexemplare durch die Druckerei.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Eßlinger Straße 16,
K. Knopp, Tübingen, Waldhäuser Straße 105,
R. Nevanlinna, Helsinki, Pietarink 5 a,
E. Schmidt, Berlin-Charlottenburg 2, Bismarckstraße 107[IV],
F. K. Schmidt, Flughafen Ainring, Post Freilassing (Obb.).

48. Band. **Inhalt:** 2. Heft.

Seite

Graf, Prof. Dr. H., und Dr. H. Thomas, Darmstadt, Techn. Hochschule, Lehrst. f. Geometrie: Zur Frage des Gleichgewichts von Vierecksnetzen aus verknoteten und gespannten Fäden. I. 193

Haupt, Prof. Dr. O., Erlangen, Spardorfer Straße 45: Über Lösungen linearer Differentialgleichungen mit Asymptoten 212

Collatz, Doz. Dr. L., Karlsruhe-Rüppur, Kleiststraße 9: Einschließungssatz für die charakteristischen Zahlen von Matrizen 221

Bol, Prof. Dr. G., Heuweiler, Post Denzlingen bei Freiburg i. Br.: Über Eikörper mit Vieleckschatten 227

Görtler, Doz. Dr. H., und Wieghardt, Dr. K., Göttingen, Böttinger Straße 6, K.-W.-Inst. f. Strömungsforschung: Über eine gewisse Klasse von Strömungen zäher Flüssigkeiten und eine Kennzeichnung der Poiseuille-Strömung 247

Maruhn, Doz. Dr. K., Berlin-Wendenschloß, Falkendamm 3: Zur eindeutigen Lösbarkeit der potentialtheoretischen Randwertaufgaben bei nichtbeschränkten Randwerten 251

Hornich, Doz. Dr. H., Wien 117, Gallmeyergasse 12/10: Eine Ungleichung für Vektorlängen 268

Klein-Barmen, Dr. F., Wuppertal-Wichlinghausen, Müggenburg 62: Über gewisse Halbverbände und kommutative Semigruppen. Erster Teil 275

Haupt, Prof. Dr. O., Erlangen, Spardorfer Straße 45: Über das asymptotische Verhalten der Lösungen gewisser linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen 289

Pisot, Doz. Dr. C., Freiburg i. Br., Bertoldstraße 62: Ein Kriterium für die algebraischen Zahlen 293

Quade, Prof. Dr. W., Karlsruhe, Dammerstockstraße 23: Ein neues Verfahren der schrittweisen Näherungen zur Lösung von $y' = f(x, y)$ 324

Zur Frage des Gleichgewichts von Viereckssnetzen aus verknoteten und gespannten Fäden *).

Zum 80. Geburtstag von S. FINSTERWALDER.

Erster Teil:
Allgemeine Gleichgewichtsbedingungen (Kapitel I und II); Kennzeichnung, Übersicht und kurze Beschreibung der allgemeinsten Netze besonderer Netzklassen (Kapitel III und IV).

Von

H. Graf und H. Thomas in Darmstadt.

I. Fadennetze mit allgemeiner Spannungsverteilung und allgemeiner Netzstruktur.

Ein einfach zusammenhängender Bereich einer offenen, im Sinne der Differentialgeometrie regulären Fläche, den wir im folgenden kurz ‚Fläche' nennen wollen, sei mit einem ‚Netz' aus zwei Kurvenscharen überzogen. Dabei sei der einfach zusammenhängende Bereich das topologische Abbild eines konvexen, einfach zusammenhängenden Bildbereiches der Euklidischen Ebene, und die beiden Kurvenscharen des Netzes seien das topologische Abbild von zwei nicht zusammenfallenden Scharen paralleler Geraden innerhalb des Bildbereiches. Wir denken uns Fläche und Netzkurven modellmäßig realisiert: Die Fläche als starre und glatte Schale, das Kurvennetz als Fadennetz, dessen Fäden in den Kreuzungspunkten miteinander verknotet sind. Dabei seien die Fäden ideale Fäden, d. h. unendlich dünn, undehnbar, gewichtslos, ohne Zwang verbiegbar, ohne Reibung auf der Fläche gleitend und hierbei stets in der Fläche verbleibend. Wir lassen in den Randpunkten unseres über das Flächenmodell ausgebreiteten Fadennetzes ‚Randkräfte' in Richtung der Fäden angreifen. Diese Randkräfte können stets so gewählt werden, daß sich das Fadennetz im Gleichgewicht befindet. Dabei werden die Netzfäden im allgemeinen einen Druck senkrecht zur Trägerfläche ausüben. Wir fragen, ob beim Übergang zu einem Fadennetz mit infinitesimalen Maschen und mit infinitesimalen Randkräften sich Fläche, Netz und Randkräfte so bestimmen lassen, daß in allen Flächenpunkten die von dem Netz auf die Fläche ausgeübten Druckkräfte Null werden. Dann ist die starre Fläche als widerstandgebender Träger für das Fadennetz zur Aufrechterhaltung des

*) Vergl. hierzu: S. FINSTERWALDER, Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation, Jahresberichte der D. M. V. 6 (1899), S. 67 ff.

Gleichgewichts entbehrlich; das in den Flächenrand eingespannte Fadennetz erzeugt für sich allein ein ‚Fadenmodell' der nämlichen Fläche[1]).

Unser gesuchtes Fadennetz, das sich unter dem Einfluß von Randkräften im Gleichgewicht befindet, bestehe aus den Parameterkurven der Trägerfläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$. Um die Fadenspannungen längs der Kurvenscharen $v =$ konst. (u-Linien) bzw. $u =$ konst. (v-Linien) auf eine noch genauer zu erklärende Weise zu kennzeichnen, führen wir zwei stets positive[2]) Funktionen $\sigma_1(u, v)$ und $\sigma_2(u, v)$ ein. Für diese und alle weiteren Funktionen, die wir später noch einführen werden, setzen wir Regularität voraus. Wir fragen jetzt nach den Bedingungsgleichungen, die zwischen den Grundgrößen erster Ordnung E, F, G und zweiter Ordnung L, M, N der Trägerfläche und den Spannungsfunktionen σ_1, σ_2 des Fadennetzes bestehen.

Zunächst denken wir uns die Parameterkurven auf der Fläche zu zwei Folgen *diskret* aufeinanderfolgender Kurven angeordnet und zwar so, daß sich bei ihrer topologischen Abbildung in die u/v-Ebene — mit u und v als rechtwinkligen Kartesischen Koordinaten — zwei Folgen paralleler gleichabstehender Geraden mit dem Abstand Δt ergeben. In jedem Knotenpunkt unseres diskreten, im allgemeinen krummlinigen und ungleichmaschigen Viereckesnetzes auf der Fläche, dem also ein geradliniges und gleichmaschiges Quadratnetz in der u/v-Ebene entspricht, werde nun mittels der eingeführten Spannungsfunktionen den beiden hindurchgehenden Fäden zunächst jeweils der Spannungsbetrag $\Delta t\, \sigma_1(u, v)$ bzw. $\Delta t\, \sigma_2(u, v)$ zugeordnet.

Wir ersetzen nun überall die Kurvenbögen unseres Viereckesnetzes durch deren *Sehnen*, denken uns das so entstandene Sehnennetz wieder durch verknotete und gespannte (andere) Fäden realisiert und fragen nach den Gleichgewichtsbedingungen in einem beliebigen Knotenpunkt P des Sehnennetzes. Wir betrachten die vier Sehnenvektoren $\Delta \mathfrak{x}_1$, $\Delta \bar{\mathfrak{x}}_1$ bzw. $\Delta \mathfrak{x}_2$, $\Delta \bar{\mathfrak{x}}_2$, die vom Knotenpunkt P aus nach den beiden jeweils benachbarten Knotenpunkten auf der u-Kurve bzw. auf der v-Kurve zielen:

$$\Delta \mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}(u+\Delta t, v) - \mathfrak{x}(u, v) = \quad \Delta t\, \mathfrak{x}_u + \frac{\Delta t^2}{2} \mathfrak{x}_{uu} + \Delta t^3 (\cdot\cdot),$$

$$\Delta \bar{\mathfrak{x}}_1 = \mathfrak{x}(u-\Delta t, v) - \mathfrak{x}(u, v) = -\Delta t\, \mathfrak{x}_u + \frac{\Delta t^2}{2} \mathfrak{x}_{uu} + \Delta t^3 (\cdot\cdot),$$

$$\Delta \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}(u, v+\Delta t) - \mathfrak{x}(u, v) = \quad \Delta t\, \mathfrak{x}_v + \frac{\Delta t^2}{2} \mathfrak{x}_{vv} + \Delta t^3 (\cdot\cdot),$$

$$\Delta \bar{\mathfrak{x}}_2 = \mathfrak{x}(u, v-\Delta t) - \mathfrak{x}(u, v) = -\Delta t\, \mathfrak{x}_v + \frac{\Delta t^2}{2} \mathfrak{x}_{vv} + \Delta t^3 (\cdot\cdot).$$

[1]) Diese Viereckesnetze lassen sich nicht nur als im Gleichgewicht befindliche Fadennetze, sondern auch als ‚wackelige' Kurvennetze mit starren Viereckesmaschen deuten; vgl. hierzu etwa R. SAUER, Wackelige Kurvennetze bei einer infinitesimalen Flächenverbiegung. Math. Annalen **108** (1933), S. 673.

[2]) Ein Vorzeichenwechsel der Funktionen σ_1 und σ_2 würde den Übergang von Zug- zu Druckspannungen bedeuten; Druckspannungen kann aber unser Fadennetz nicht aufnehmen.

Als Einheitsvektoren $\mathfrak{e} = \frac{\Delta \mathfrak{x}}{\sqrt{\Delta \mathfrak{x}^2}}$ in Richtung dieser vier Sehnenvektoren ergeben sich hieraus entsprechend:

$$\mathfrak{e}_1 = \frac{\mathfrak{x}_u}{\sqrt{E}} + \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\mathfrak{x}_{uu}}{\sqrt{E}} - \frac{E_u \mathfrak{x}_u}{2E\sqrt{E}}\right) + \Delta t^2(\cdots),$$

$$\bar{\mathfrak{e}}_1 = -\frac{\mathfrak{x}_u}{\sqrt{E}} + \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\mathfrak{x}_{uu}}{\sqrt{E}} - \frac{E_u \mathfrak{x}_u}{2E\sqrt{E}}\right) + \Delta t^2(\cdots),$$

$$\mathfrak{e}_2 = \frac{\mathfrak{x}_v}{\sqrt{G}} + \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\mathfrak{x}_{vv}}{\sqrt{G}} - \frac{G_v \mathfrak{x}_v}{2G\sqrt{G}}\right) + \Delta t^2(\cdots),$$

$$\bar{\mathfrak{e}}_2 = -\frac{\mathfrak{x}_v}{\sqrt{G}} + \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\mathfrak{x}_{vv}}{\sqrt{G}} - \frac{G_v \mathfrak{x}_v}{2G\sqrt{G}}\right) + \Delta t^2(\cdots).$$

Wir wollen nun den Sehnen als Fadenspannungen jeweils die Mittelwerte der Spannungen in den Sehnenendpunkten, d. h. in den Knotenpunkten unseres Netzes zuerteilen und erhalten demgemäß für unsere vier von P ausgehenden Sehnen die Spannungsbeträge:

$$\Delta k_1 = \frac{\Delta t}{2}(\sigma_1(u+\Delta t, v) + \sigma_1(u,v)) = \Delta t\,\sigma_1 + \frac{\Delta t^2}{2}(\sigma_1)_u + \Delta t^3(\cdots),$$

$$\Delta \bar{k}_1 = \frac{\Delta t}{2}(\sigma_1(u-\Delta t, v) + \sigma_1(u,v)) = \Delta t\,\sigma_1 - \frac{\Delta t^2}{2}(\sigma_1)_u + \Delta t^3(\cdots),$$

$$\Delta k_2 = \frac{\Delta t}{2}(\sigma_2(u, v+\Delta t) + \sigma_2(u,v)) = \Delta t\,\sigma_2 + \frac{\Delta t^2}{2}(\sigma_2)_v + \Delta t^3(\cdots),$$

$$\Delta \bar{k}_2 = \frac{\Delta t}{2}(\sigma_2(u, v-\Delta t) + \sigma_2(u,v)) = \Delta t\,\sigma_2 - \frac{\Delta t^2}{2}(\sigma_2)_v + \Delta t^3(\cdots).$$

Die in dem Knotenpunkt P des Netzes zusammenlaufenden beiden Sehnen des zur u-Linie bzw. zur v-Linie gehörenden Sehnenpaares besitzen somit jeweils im Mittel den Spannungswert $\frac{1}{2}(\Delta k_1 + \Delta \bar{k}_1)$ bzw. $\frac{1}{2}(\Delta k_2 + \Delta \bar{k}_2)$, der bis auf Größen der Ordnung Δt^3 mit dem ursprünglich dem Knotenpunkt P zugeordneten Spannungswert $\Delta t\,\sigma_1$ bzw. $\Delta t\,\sigma_2$ übereinstimmt. Damit nun in dem Knotenpunkt P Gleichgewicht herrscht, muß die Vektorsumme der vier dort angreifenden Kräfte verschwinden; wir erhalten somit die Gleichgewichtsbedingung

$$\Delta k_1 \mathfrak{e}_1 + \Delta \bar{k}_1 \bar{\mathfrak{e}}_1 + \Delta k_2 \mathfrak{e}_2 + \Delta \bar{k}_2 \bar{\mathfrak{e}}_2 = \mathfrak{o},$$

d. h.

$$\left(\frac{\mathfrak{x}_{uu}}{\sqrt{E}} - \frac{E_u \mathfrak{x}_u}{2E\sqrt{E}}\right)\sigma_1 + \left(\frac{\mathfrak{x}_{vv}}{\sqrt{G}} - \frac{G_v \mathfrak{x}_v}{2G\sqrt{G}}\right)\sigma_2 + \frac{\mathfrak{x}_u}{\sqrt{E}}(\sigma_1)_u + \frac{\mathfrak{x}_v}{\sqrt{G}}(\sigma_2)_v + \Delta t(\cdots) = \mathfrak{o}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung stellt einen Vektor dar, der verschwinden soll; es müssen daher die inneren Produkte des Vektors mit drei nicht komplanaren Vektoren, etwa den Tangentenvektoren $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$ und dem Flächen-

normalenvektor $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v$ verschwinden, also die folgenden drei Beziehungen gelten:

$$\sqrt{E}\,(\sigma_1)_u + \frac{F}{\sqrt{G}}(\sigma_2)_v + \frac{2GF_v - FG_v - GG_u}{2G\sqrt{G}}\,\sigma_2 + \Delta t(\cdots) = 0,$$

$$\sqrt{G}\,(\sigma_2)_v + \frac{F}{\sqrt{E}}(\sigma_1)_u + \frac{2EF_u - FE_u - EE_v}{2E\sqrt{E}}\,\sigma_1 + \Delta t(\cdots) = 0,$$

$$\frac{L}{\sqrt{E}}\sigma_1 + \frac{N}{\sqrt{G}}\,\sigma_2 + \Delta t(\cdots) = 0.$$

Wir führen jetzt den Grenzübergang $\Delta t \to 0$ durch, der unser Viereckssnetz aus den Sehnen der Parameterkurven in das *infinitesimale* Viereckssnetz aus den Parameterkurven selbst überführt und erhalten nach einer für das Folgende zweckmäßigen Umformung:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \sqrt{E}\,(\sigma_1)_u - (\sqrt{G})_u\,\sigma_2 + \left(\dfrac{F}{\sqrt{EG}}\sqrt{E}\,\sigma_2\right)_v = 0, \\ \sqrt{G}\,(\sigma_2)_v - (\sqrt{E})_v\,\sigma_1 + \left(\dfrac{F}{\sqrt{EG}}\sqrt{G}\,\sigma_1\right)_u = 0, \\ \dfrac{L}{E}\sqrt{E}\,\sigma_1 + \dfrac{N}{G}\sqrt{G}\,\sigma_2 = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen besagen, daß sich das Parameternetz als infinitesimales Fadennetz unter dem Einfluß von infinitesimalen Randkräften im Gleichgewicht befindet. Die Grundgrößen erster und zweiter Ordnung der Trägerfläche unseres im Gleichgewicht befindlichen Fadennetzes genügen neben diesen Gleichgewichtsbedingungen (I) auch noch den Flächen-Grundgleichungen von Codazzi und Gauss, also insgesamt sechs partiellen Differentialgleichungen. Es erweist sich als möglich und zweckmäßig, in diesen sechs Gleichungen die Grundgrößen durch Größen zu ersetzen, die für die Fläche und die Parameterkurven von unmittelbarer geometrischer Bedeutung sind. Diese Größen sind für die

	u-Linien	bzw.	v-Linien
die Bogenlängenfunktionen[3])	$s_1 = \sqrt{E} > 0$	bzw.	$s_2 = \sqrt{G} > 0,$
die Normalkrümmungen	$n_1 = \dfrac{L}{E}$	bzw.	$n_2 = \dfrac{N}{G},$
der Schnittwinkel	$\omega = \arccos \dfrac{F}{\sqrt{EG}} \neq 0,$		
das „Schränkungsmaß“[4])	$m = \dfrac{M}{\sqrt{EG}}.$		

[3]) In jedem Netzknotenpunkt haben also die beiden hindurchgehenden Fäden die Längenelemente $s_1 dt$ bzw. $s_2 dt$ und sind mit den Kraftelementen $\sigma_1 dt$ bzw. $\sigma_2 dt$ gespannt.

[4]) Das Schränkungsmaß ist ein Maß für die „Unebenheit der Maschenvierecke“ (Verschränkung) des infinitesimalen Netzes (vgl. hierzu etwa Scheffers, Theorie der Flächen, S. 250).

Nach Einführung dieser Größen lauten die Gleichgewichtsbedingungen (I):

$$\text{(I 1)} \qquad \begin{cases} (\sigma_1)_u\, s_1 - (s_2)_u\, \sigma_2 + (\sigma_2\, s_1 \cos\omega)_v = 0, \\ (\sigma_2)_v\, s_2 - (s_1)_v\, \sigma_1 + (\sigma_1\, s_2 \cos\omega)_u = 0, \end{cases}$$

$$\text{(I 2)} \qquad n_1\, \sigma_1\, s_1 + n_2\, \sigma_2\, s_2 = 0;$$

und die Grundgleichungen:

$$\text{(I 3)} \qquad \begin{cases} (n_1)_v\, s_1 - m_u\, s_2 = \{(s_1)_v\,(2\cos^2\omega - 1) - (s_2)_u \cos\omega\}\dfrac{n_1}{\sin^2\omega} + \\ \qquad + \{(s_2)_u - (s_1)_v \cos\omega + \dfrac{s_2}{4}(\cos^2\omega)_u\}\dfrac{2\,m}{\sin^2\omega} + \\ \qquad + \{(s_1)_v - (s_2)_u \cos\omega - s_2\,(\cos\omega)_u\}\dfrac{n_2}{\sin^2\omega}, \\ (n_2)_u\, s_2 - m_v\, s_1 = \{(s_2)_u\,(2\cos^2\omega - 1) - (s_1)_v \cos\omega\}\dfrac{n_2}{\sin^2\omega} + \\ \qquad + \{(s_1)_v - (s_2)_u \cos\omega + \dfrac{s_1}{4}(\cos^2\omega)_v\}\dfrac{2\,m}{\sin^2\omega} + \\ \qquad + \{(s_2)_u - (s_1)_v \cos\omega - s_1\,(\cos\omega)_v\}\dfrac{n_1}{\sin^2\omega}, \end{cases}$$

$$\text{(I 4)} \qquad K = \frac{n_1\, n_2 - m^2}{\sin^2\omega} = \frac{\omega_{u\,v} + (s_2\, g_2)_u + (s_1\, g_1)_v}{s_1\, s_2 \sin\omega}.$$

Dabei sind K das Gausssche Krümmungsmaß der Fläche und

$$\text{(I 5)} \qquad g_1 = \frac{(s_2 \cos\omega)_u - (s_1)_v}{s_1\, s_2 \sin\omega}, \qquad g_2 = \frac{(s_1 \cos\omega)_v - (s_2)_u}{s_1\, s_2 \sin\omega}$$

die geodätischen Krümmungen der u-Linien bzw. v-Linien. Schließlich hat man noch für die mittlere Krümmung H der Fläche:

$$\text{(I 6)} \qquad H = \frac{n_1 - 2\,m\cos\omega + n_2}{2\sin^2\omega}.$$

Da für die Netzkurven sowohl die Bogenlängenfunktionen s_1 und s_2 als auch die Spannungsfunktionen σ_1 und σ_2 als stets positiv eingeführt sind, so folgt aus der Gleichgewichtsbedingung (I 2), daß die Normalkrümmungen n_1 und n_2 der Netzkurven in jedem Knotenpunkt entgegengesetzte Vorzeichen haben oder aber beide zugleich verschwinden; letzteres besagt, daß an der betrachteten Stelle die Netzkurven in Richtung der Schmiegtangenten verlaufen. Die Trägerfläche muß also in jedem Punkt negativ gekrümmt oder eben sein.

Zusammenfassung. *Für jedes, unter dem Einfluß von infinitesimalen Randkräften im Gleichgewicht befindliche infinitesimale Fadennetz und seine Trägerfläche gelten die Gleichgewichtsbedingungen* (I 1), (I 2) *und die Grundgleichungen* (I 3), (I 4). *Diese Gleichungen stellen die Bedingungen für das allgemeinste derartige Fadennetz dar, da weder an die Fadenspannungen noch an die Netzstruktur noch an die Netzkurven selbst irgendwelche besonderen For-*

derungen gestellt sind. Die Trägerfläche muß in jedem Punkt negativ gekrümmt oder eben sein.

Den Fall der Ebene als Trägerfläche wollen wir jedoch für alles Folgende von der Betrachtung ausschließen.

II. Fadennetze mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur.

Unter unseren im Gleichgewicht befindlichen Fadennetzen mit infinitesimalen Fadenspannungen und mit infinitesimalen Netzmaschen betrachten wir jetzt spezielle Netze, die *isotrope Spannungsverteilung und rhombische Netzstruktur* besitzen sollen. Die isotrope Spannungsverteilung im Netz sei dabei durch die Forderung erklärt, daß in jedem Knotenpunkt des Netzes die Elementenpaare der Fadens*pannungen* einander gleich, also $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ sein sollen; in entsprechender Weise kann die rhombische Struktur des Netzes durch die Forderung erklärt werden, daß in jedem Knotenpunkt des Netzes die Elementenpaare der Faden*längen* einander gleich, also $s_1 = s_2 = s$ sein sollen.

Für $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ und $s_1 = s_2 = s$ lauten die Gleichgewichtsbedingungen (I 1) und (I 2):

$$\text{(II 1)} \qquad \sigma_u s - s_u \sigma + (\sigma s \cos\omega)_v = 0, \quad \sigma_v s - s_v \sigma + (\sigma s \cos\omega)_u = 0,$$

$$\text{(II 2)} \qquad n_1 = -n_2 = n;$$

und die Grundgleichungen (I 3) und (I 4):

$$\text{(II 3)} \qquad \begin{cases} n_v - m_u = \left\{ -\frac{s_v}{s}\sin^2\omega + \frac{1}{2}(\cos\omega)_u \right\} \frac{2n}{\sin^2\omega} + \\ \qquad + \left\{ \frac{s_u}{s} - \frac{s_v}{s}\cos\omega + \frac{1}{4}(\cos^2\omega)_u \right\} \frac{2m}{\sin^2\omega}, \\ n_u + m_v = \left\{ -\frac{s_u}{s}\sin^2\omega + \frac{1}{2}(\cos\omega)_v \right\} \frac{2n}{\sin^2\omega} - \\ \qquad - \left\{ \frac{s_v}{s} - \frac{s_u}{s}\cos\omega + \frac{1}{4}(\cos^2\omega)_v \right\} \frac{2m}{\sin^2\omega}, \end{cases}$$

$$\text{(II 4)} \qquad K = -\frac{n^2+m^2}{\sin^2\omega} = \frac{\omega_{uv} + (s g_2)_u + (s g_1)_v}{s^2 \sin\omega};$$

dabei hat man für die geodätischen Krümmungen der Netzkurven:

$$\text{(II 5)} \qquad g_1 = \frac{(s\cos\omega)_u - s_v}{s^2 \sin\omega}, \qquad g_2 = \frac{(s\cos\omega)_v - s_u}{s^2 \sin\omega}.$$

Ferner erhält man wegen $n_1 = -n_2$ jetzt für die mittlere Krümmung:

$$\text{(II 6)} \qquad H = -\frac{\cos\omega}{\sin^2\omega}\, m.$$

Zum Schluß dieses Kapitels wollen wir die Gleichgewichtsbedingungen (II 1) durch drei Beziehungen ersetzen, die abwechselnd den Schnittwinkel ω, die

Spannungsfunktion σ und die Bogenlängenfunktion s nicht mehr enthalten. Die Elimination von ω — partielle Ableitung der Gleichungen (II 1) nach u bzw. v und anschließende Subtraktion — liefert:

$$\text{(II 7)} \qquad \frac{s_{uu} - s_{vv}}{s} = \frac{\sigma_{uu} - \sigma_{vv}}{\sigma}.$$

Die Elimination von σ — Auflösung der Gleichungen (II 1) nach $\frac{\sigma_u}{\sigma}$ und $\frac{\sigma_v}{\sigma}$:

$$\frac{\sigma_u}{\sigma} = \left\{\frac{s_u}{s}(\cos^2\omega + 1) - 2\frac{s_v}{s}\cos\omega + \frac{1}{2}(\cos^2\omega)_u - (\cos\omega)_v\right\}\frac{1}{\sin^2\omega},$$

$$\frac{\sigma_v}{\sigma} = \left\{\frac{s_v}{s}(\cos^2\omega + 1) - 2\frac{s_u}{s}\cos\omega + \frac{1}{2}(\cos^2\omega)_v - (\cos\omega)_u\right\}\frac{1}{\sin^2\omega},$$

partielle Ableitung dieser neuen Gleichungen nach v bzw. u und anschließende Subtraktion — liefert:

$$\text{(II 8)} \qquad \begin{aligned} &\left\{\ln\frac{1-\cos\omega}{1+\cos\omega}\right\}_{uu} + 4\left\{\frac{(\ln s)_v - (\ln s)_u\cos\omega}{\sin^2\omega}\right\}_u \\ &= \left\{\ln\frac{1-\cos\omega}{1+\cos\omega}\right\}_{vv} + 4\left\{\frac{(\ln s)_u - (\ln s)_v\cos\omega}{\sin^2\omega}\right\}_v. \end{aligned}$$

Die Elimination von s — völlig analog der von σ — liefert:

$$\text{(II 9)} \qquad \begin{aligned} &\left\{\ln\frac{1+\cos\omega}{1-\cos\omega}\right\}_{uu} + 4\left\{\frac{(\ln\sigma)_v + (\ln\sigma)_u\cos\omega}{\sin^2\omega}\right\}_u \\ &= \left\{\ln\frac{1+\cos\omega}{1-\cos\omega}\right\}_{vv} + 4\left\{\frac{(\ln\sigma)_u + (\ln\sigma)_v\cos\omega}{\sin^2\omega}\right\}_v. \end{aligned}$$

Zusammenfassung. *Für Fadennetze mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur gelten statt der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen* (I 1) *und* (I 2) *jetzt die Gleichgewichtsbedingungen* (II 1) *und* (II 2), *an deren Stelle auch je zwei der hieraus abgeleiteten Beziehungen* (II 7), (II 8) *und* (II 9) *treten können. Die Trägerfläche genügt statt den allgemeinen Grundgleichungen* (I 3) *und* (I 4) *jetzt den Grundgleichungen* (II 3) *und* (II 4).

III. Vier besondere Klassen von Fadennetzen mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur.

Von unseren infinitesimalen Fadennetzen mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur, die unter dem Einfluß von Randkräften im Gleichgewicht sind, betrachten wir in diesem Kapitel vier besondere Klassen. Bei jeder Klasse ist an das Netz noch je eine zusätzliche Forderung gestellt.

a) Geodätische Fadennetze, d. h. Fadennetze, bei denen die Netzkurven geodätische Linien der Trägerfläche sind. Sie genügen der zusätzlichen Bedingung $g_1 = g_2 = 0$.

Aus $g_1 = g_2 = 0$ folgt auf Grund der Gleichungen (II 5):

$$(s \cos \omega)_u - s_v = 0, \qquad (s \cos \omega)_v - s_u = 0.$$

Mit Rücksicht hierauf lauten die Gleichgewichtsbedingungen (II 1):

$$s\,(\sigma_u + \sigma_v \cos \omega) = 0, \quad s\,(\sigma_v + \sigma_u \cos \omega) = 0,$$

woraus sich wegen $s \neq 0 \neq \sin \omega$ sofort σ als eine Konstante, etwa $= 1$, ergibt. Umgekehrt lauten für $\sigma =$ konst. $\neq 0$ die Gleichgewichtsbedingungen (II 1):

$$(s \cos \omega)_u - s_v = 0, \qquad (s \cos \omega)_v - s_u = 0;$$

hieraus ergibt sich auf Grund der Gleichungen (II 5) und wegen $s \neq 0 \neq \sin \omega$ wieder $g_1 = g_2 = 0$.

Bei geodätischen Fadennetzen[5]) *mit isotroper Spannungsverteilung haben also alle Fäden überall die gleiche Spannung. Umgekehrt haben Fadennetze mit überall gleicher, nicht verschwindender Fadenspannung stets geodätische Netzlinien.*

Um nunmehr auch den Schnittwinkel ω und die Bogenlängenfunktion s der Netzkurven zu bestimmen, setzen wir zunächst in der Gleichgewichtsbedingung (II 9) $\sigma = 1$ und erhalten die Differentialgleichung:

$$\left\{\ln \frac{1+\cos \omega}{1-\cos \omega}\right\}_{uu} = \left\{\ln \frac{1+\cos \omega}{1-\cos \omega}\right\}_{vv},$$

in deren allgemeiner Lösung

$$\ln \frac{1+\cos \omega}{1-\cos \omega} = \ln P - \ln Q, \quad \text{d. h.} \quad \cos \omega = \frac{P-Q}{P+Q}$$

$P(u+v)$ und $Q(u-v)$ willkürliche, nicht verschwindende Funktionen der angegebenen Argumente sind. Trägt man schließlich die für σ und ω gewonnenen Ergebnisse in die Gleichgewichtsbedingungen (II 1) ein und bezeichnet mit $'$ die Ableitungen nach dem jeweiligen Argument, so erhält man:

$$\frac{s_u}{s} = \frac{P'+Q'}{P+Q}, \qquad \frac{s_v}{s} = \frac{P'-Q'}{P+Q}, \qquad \text{d. h. } s = P+Q.$$

---

[5]) Dabei braucht die Netzstruktur nicht notwendig rhombisch zu sein; denn der angegebene Satz läßt sich für $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ auch aus den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (I 1) und den Gleichungen (I 5) herleiten. — Bei geodätischen Fadennetzen kann auch an Stelle der Verknotung ein passendes Übereinanderlagern der idealen (also reibungslos übereinander gleitenden) Fäden treten. Solche Fadennetze sind, sofern ihre Trägerflächen Dreh-, Schrauben- bzw. Minimalflächen sind, bereits untersucht worden. Vgl. H. Thomas, Über Flächen, auf denen sich besondere Arten von Netzen geodätischer Linien ausbreiten lassen. Math. Zeitschr. **44** (1938), S. 257.

Für geodätische Fadennetze mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur ergeben sich somit die folgenden Gleichgewichtsbedingungen:

(III a 1) $$s = P(u+v) + Q(u-v), \quad \sigma = 1, \quad \omega = \arccos \frac{P(u+v) - Q(u-v)}{P(u+v) + Q(u-v)},$$

(III a 2) $$n_1 = -n_2 = n.$$

Die Trägerfläche des Netzes bestimmt sich aus diesen Gleichungen und den Grundgleichungen, welche jetzt lauten:

(III a 3)
$$\begin{cases} n_v - m_u = \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{P'}{P} - \frac{Q'}{Q}\right) - 2\frac{P'-Q'}{P+Q}\right\} n + \\ \qquad + \left\{\frac{P'}{P} + \frac{Q'}{Q} + \frac{1}{2}\left(\frac{P'}{P} - \frac{Q'}{Q}\right)\frac{P-Q}{P+Q}\right\} m, \\ n_u + m_v = \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{P'}{P} + \frac{Q'}{Q}\right) - 2\frac{P'+Q'}{P+Q}\right\} n - \\ \qquad - \left\{\frac{P'}{P} - \frac{Q'}{Q} + \frac{1}{2}\left(\frac{P'}{P} + \frac{Q'}{Q}\right)\frac{P-Q}{P+Q}\right\} m, \end{cases}$$

(III a 4)
$$K = -\frac{(P+Q)^2}{4PQ}(n^2+m^2)$$
$$= -\frac{1}{4(P+Q)^3}\left\{P\left(2\frac{Q''}{Q} - \frac{Q'^2}{Q^2}\right) + P\left(2\frac{P''}{P} - 3\frac{P'^2}{P^2}\right) + \right.$$
$$\left. + Q\left(2\frac{P''}{P} - \frac{P'^2}{P^2}\right) + Q\left(2\frac{Q''}{Q} - 3\frac{Q'^2}{Q^2}\right)\right\}.$$

Die erste Grundform

$$s^2(u'^2 + 2u'v'\cos\omega + v'^2)$$

der Trägerfläche schreibt sich, wenn wir gemäß den Gleichungen (III a 1) die Funktionen s und ω durch $P(u+v)$ und $Q(u-v)$ ersetzen, in der Form:

$$(P+Q)^2\left(u'^2 + 2u'v'\frac{P-Q}{P+Q} + v'^2\right).$$

Durch eine geeignete Parametertransformation kann nun das infinitesimalrhombische u/v-Netz aus den geodätischen Netzlinien übergeführt werden in ein infinitesimal-quadratisches (isothermes) $\bar{u}/\bar{v}$-Netz aus den winkelhalbierenden Kurven der Netzlinien: wir setzen $A(u+v) = \bar{u}$, $B(u-v) = \bar{v}$, wobei $A'^2 = P$, $B'^2 = Q$ sein soll, und schreiben für $P(u+v) = \bar{P}(\bar{u})$, $Q(u-v) = \bar{Q}(\bar{v})$. Nach einer einfachen Umrechnung erscheint dann die erste Grundform unserer Trägerfläche in der Liouvilleschen Form[6]):

$$(\bar{P} + \bar{Q})(\bar{u}'^2 + \bar{v}'^2).$$

---

[6]) Vgl. A. Voss, Über diejenigen Flächen, welche durch zwei Scharen von Kurven konstanter geodätischer Krümmung in infinitesimale Rhomben zerlegt werden. Sitzungsberichte der Bayr. Akademie **36** (1906), S. 247.

Ergebnis. *Ein geodätisches Fadennetz mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur besitzt als Trägerfläche stets eine* Liouvillesche *Fläche. Die beiden (orthogonalen) Scharen der winkelhalbierenden Kurven unserer geodätischen Netzlinien bestehen aus den konfokalen Ellipsen und Hyperbeln der* Liouvilleschen *Fläche.*

b) Äquidistante Fadennetze, d. h. Fadennetze mit infinitesimalen Rhomben konstanter Seitenlänge (Tschebyscheff-Netze). Sie genügen der zusätzlichen Bedingung $s = \text{konst.}$; wir setzen $s = 1$ und verfügen damit über den Größenmaßstab.

Für $s = 1$ vereinfacht sich die Gleichgewichtsbedingung (II 8) und wir erhalten die Differentialgleichung:

$$\left\{\ln\frac{1-\cos\omega}{1+\cos\omega}\right\}_{uu} = \left\{\ln\frac{1-\cos\omega}{1+\cos\omega}\right\}_{vv};$$

ihre allgemeine Lösung lautet

$$\ln\frac{1-\cos\omega}{1+\cos\omega} = \ln P - \ln Q, \quad \text{d. h. } \cos\omega = \frac{Q-P}{Q+P},$$

wobei $P(u+v)$ und $Q(u-v)$ wieder willkürliche, nicht verschwindende Funktionen der angegebenen Argumente sind. Trägt man schließlich diese Ausdrücke für s und ω in die Gleichgewichtsbedingungen (II 1) ein, so erhält man:

$$\frac{\sigma_u}{\sigma} = \frac{P'+Q'}{P+Q}, \quad \frac{\sigma_v}{\sigma} = \frac{P'-Q'}{P+Q}, \quad \text{d. h. } \sigma = P+Q.$$

Für äquidistante Fadennetze mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur ergeben sich somit die folgenden Gleichgewichtsbedingungen:

(III b 1) $$s = 1, \quad \sigma = P(u+v)+Q(u-v), \quad \omega = \arccos\frac{Q(u-v)-P(u+v)}{Q(u-v)+P(u+v)},$$

(III b 2) $$n_1 = -n_2 = n.$$

Die Trägerfläche des Netzes bestimmt sich aus diesen Gleichungen und den Grundgleichungen, welche jetzt lauten:

(III b 3)
$$\begin{cases} n_v - m_u = -\frac{1}{2}\left(\frac{P'}{P}-\frac{Q'}{Q}\right)n - \frac{1}{2}\left(\frac{P'}{P}-\frac{Q'}{Q}\right)\frac{Q-P}{Q+P}m, \\ n_u + m_v = -\frac{1}{2}\left(\frac{P'}{P}+\frac{Q'}{Q}\right)n + \frac{1}{2}\left(\frac{P'}{P}+\frac{Q'}{Q}\right)\frac{Q-P}{Q+P}m, \end{cases}$$

(III b 4)
$$K = -\frac{(P+Q)^2}{4PQ}(n^2+m^2)$$
$$= -\frac{1}{4(P+Q)}\left\{P\left(2\frac{Q''}{Q}-\frac{Q'^2}{Q^2}\right)+P\left(2\frac{P''}{P}-3\frac{P'^2}{P^2}\right)+\right.$$
$$\left.+Q\left(2\frac{P''}{P}-\frac{P'^2}{P^2}\right)+Q\left(2\frac{Q''}{Q}-3\frac{Q'^2}{Q^2}\right)\right\}.$$

c) Konjugierte Fadennetze, d. h. Fadennetze, bei denen die Netzkurven aus zwei konjugierten Kurvenscharen der Trägerfläche bestehen. Sie genügen der zusätzlichen Bedingung $m = 0$.

Für $m = 0$ lauten die Grundgleichungen (II 3):

$$\frac{n_v}{n} = -2\frac{s_v}{s} + \frac{(\cos\omega)_u}{\sin^2\omega}, \qquad \frac{n_u}{n} = -2\frac{s_u}{s} + \frac{(\cos\omega)_v}{\sin^2\omega}.$$

Durch partielle Ableitung dieser Gleichungen nach u bzw. v und anschließende Subtraktion erhält man:

$$\left\{\frac{(\cos\omega)_u}{\sin^2\omega}\right\}_u = \left\{\frac{(\cos\omega)_v}{\sin^2\omega}\right\}_v,$$

d. h.

$$\left\{\ln\frac{1+\cos\omega}{1-\cos\omega}\right\}_{uu} = \left\{\ln\frac{1+\cos\omega}{1-\cos\omega}\right\}_{vv};$$

hieraus folgt genau wie im Abschnitt a):

$$\cos\omega = \frac{P-Q}{P+Q},$$

wobei $P(u+v)$ und $Q(u-v)$ wieder willkürliche, nicht verschwindende Funktionen der angegebenen Argumente sind.

Für konjugierte Fadennetze mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur ergeben sich somit die folgenden Gleichgewichtsbedingungen:

(III c 1) $$\begin{cases} \sigma_u s - s_u\sigma + (\sigma s\cos\omega)_v = 0, \quad \sigma_v s - s_v\sigma + (\sigma s\cos\omega)_u = 0, \\ \text{wobei} \quad \cos\omega = \dfrac{P(u+v)-Q(u-v)}{P(u+v)+Q(u-v)} \quad \text{ist,} \end{cases}$$

(III c 2) $$n_1 = -n_2 = n, \quad m = 0.$$

Die Trägerfläche des Netzes bestimmt sich aus diesen Gleichungen und den Grundgleichungen, welche jetzt lauten:

(III c 3) $$\frac{n_v}{n} = -2\frac{s_v}{s} + \frac{1}{2}\left(\frac{P'}{P} - \frac{Q'}{Q}\right), \quad \frac{n_u}{n} = -2\frac{s_u}{s} + \frac{1}{2}\left(\frac{P'}{P} + \frac{Q'}{Q}\right),$$

(III c 4) $$\begin{aligned} K &= -\frac{(P+Q)^2}{4PQ}n^2 \\ &= -\frac{(P+Q)^2}{4s^2PQ}\left\{\left(\frac{s_u}{s}\right)_u - \left(\frac{s_u}{s}\right)_v\frac{P-Q}{P+Q} - \frac{s_u}{s}\frac{1}{P+Q}\left(Q\frac{P'}{P} + P\frac{Q'}{Q}\right) + \right. \\ &\quad + \left(\frac{s_v}{s}\right)_v - \left(\frac{s_v}{s}\right)_u\frac{P-Q}{P+Q} - \frac{s_v}{s}\frac{1}{P+Q}\left(Q\frac{P'}{P} - P\frac{Q'}{Q}\right)\Big\} + \\ &\quad + \frac{1}{4s^2(P+Q)}\left\{P\left(2\frac{Q''}{Q} - \frac{Q'^2}{Q^2}\right) + P\left(2\frac{P''}{P} - 3\frac{P'^2}{P^2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + Q\left(2\frac{P''}{P} - \frac{P'^2}{P^2}\right) + Q\left(2\frac{Q''}{Q} - 3\frac{Q'^2}{Q^2}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Da nach Gleichung (II 6) für $m = 0$ die mittlere Krümmung H verschwindet, ist die Trägerfläche hier stets eine *Minimalfläche.*

Die zweite Grundform

$$s^2(n_1u'^2 + 2mu'v' + n_2v'^2)$$

der Trägerfläche schreibt sich mit Rücksicht auf die Gleichungen (III c 2) in der Form:

$$ns^2(u'^2 - v'^2).$$

Durch die Parametertransformation $u + v = \bar{u}$, $u - v = \bar{v}$ führen wir das rhombische u/v-Netz aus den konjugierten Netzlinien in das orthogonale $\bar{u}/\bar{v}$-Netz aus den winkelhalbierenden Diagonalkurven der Netzlinien über. Die zweite Grundform der Trägerfläche erscheint dann in der Form:

$$n s^2 \bar{u}' \bar{v}',$$

d. h. die winkelhalbierenden Diagonalkurven des konjugierten Fadennetzes sind die Schmiegtangentenkurven der Trägerfläche.

Ergebnis. *Ein konjugiertes Fadennetz mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur besitzt als Trägerfläche stets eine Minimalfläche. Die beiden (orthogonalen) Scharen der winkelhalbierenden Kurven unserer konjugierten Netzlinien bestehen aus den Schmiegtangentenkurven der Minimalfläche.*

d) Schmiegtangenten-Fadennetze, d. h. Fadennetze, bei denen die Netzkurven von den Schmiegtangentenkurven der Trägerfläche gebildet werden. Sie genügen der zusätzlichen Forderung $n_1 = -n_2 = n = 0$.

Für $n = 0$ lauten die Grundgleichungen (II 3):

$$-\frac{m_u}{m} = \left\{\frac{s_u}{s} - \frac{s_v}{s}\cos\omega + \frac{1}{4}(\cos^2\omega)_u\right\}\frac{2}{\sin^2\omega},$$

$$-\frac{m_v}{m} = \left\{\frac{s_v}{s} - \frac{s_u}{s}\cos\omega + \frac{1}{4}(\cos^2\omega)_v\right\}\frac{2}{\sin^2\omega}.$$

Durch partielle Ableitung dieser Gleichungen nach v bzw. u und anschließende Subtraktion erhält man die Gleichung

$$\left\{\frac{(\ln s)_v - (\ln s)_u\cos\omega}{\sin^2\omega}\right\}_u = \left\{\frac{(\ln s)_u - (\ln s)_v\cos\omega}{\sin^2\omega}\right\}_v,$$

welche mit der Gleichung (II 8) kombiniert schließlich liefert:

$$\left\{\ln\frac{1-\cos\omega}{1+\cos\omega}\right\}_{uu} = \left\{\ln\frac{1-\cos\omega}{1+\cos\omega}\right\}_{vv};$$

hieraus folgt genau wie im Abschnitt b):

$$\cos\omega = \frac{Q-P}{Q+P},$$

wobei $P(u+v)$ und $Q(u-v)$ wieder willkürliche, nicht verschwindende Funktionen der angegebenen Argumente sind.

Für Schmiegtangenten-Fadennetze mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur ergeben sich somit die folgenden Gleichgewichtsbedingungen:

(III d 1)
$$\begin{cases} \sigma_u s - s_u\sigma + (\sigma s\cos\omega)_v = 0, \quad \sigma_v s - s_v\sigma + (\sigma s\cos\omega)_u = 0, \\ \text{wobei} \quad \cos\omega = \dfrac{Q(u-v) - P(u+v)}{Q(u-v) + P(u+v)} \quad \text{ist,} \end{cases}$$

(III d 2)
$$n_1 = -n_2 = n = 0.$$

Die Trägerfläche des Netzes bestimmt sich aus diesen Gleichungen und den Grundgleichungen, welche jetzt lauten:

$$\text{(III d 3)} \quad \begin{cases} \frac{m_u}{m} = -\frac{s_u}{s}\frac{(P+Q)^2}{2PQ} - \frac{s_v}{s}\frac{P^2-Q^2}{2PQ} + \frac{1}{2}\left(\frac{P'}{P} - \frac{Q'}{Q}\right)\frac{Q-P}{Q+P}, \\ \frac{m_v}{m} = -\frac{s_v}{s}\frac{(P+Q)^2}{2PQ} - \frac{s_u}{s}\frac{P^2-Q^2}{2PQ} + \frac{1}{2}\left(\frac{P'}{P} + \frac{Q'}{Q}\right)\frac{Q-P}{Q+P}, \end{cases}$$

$$\text{(III d 4)} \quad K = -\frac{(P+Q)^2}{4PQ}m^2$$

$$= -\frac{(P+Q)^2}{4s^2PQ}\left\{\left(\frac{s_u}{s}\right)_u - \left(\frac{s_u}{s}\right)_v\frac{Q-P}{Q+P} + \frac{s_u}{s}\frac{P'+Q'}{P+Q} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{s_v}{s}\right)_v - \left(\frac{s_v}{s}\right)_u\frac{Q-P}{Q+P} + \frac{s_v}{s}\frac{P'-Q'}{P+Q}\right\} -$$

$$- \frac{1}{4s^2(P+Q)}\left\{P\left(2\frac{Q''}{Q} - \frac{Q'^2}{Q^2}\right) + P\left(2\frac{P''}{P} - 3\frac{P'^2}{P^2}\right) + \right.$$

$$\left. + Q\left(2\frac{P''}{P} - \frac{P'^2}{P^2}\right) + Q\left(2\frac{Q''}{Q} - 3\frac{Q'^2}{Q^2}\right)\right\}.$$

IV. Vier Sonderklassen der in Kapitel III betrachteten vier Klassen von Fadennetzen mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur.

Es werden in diesem Kapitel Fadennetze, die jeweils zwei der im vorangehenden Kapitel III betrachteten vier Netzklassen zugleich angehören, zu Sonderklassen zusammengefaßt und ihre Haupteigenschaften besprochen. Von den sechs Möglichkeiten zur Bildung solcher Sonderklassen führen nur vier zu Netzen im Sinne unserer Problemstellung [Abschnitte α) bis δ)]. Zwei Möglichkeiten scheiden aus; es sind dies: Fadennetze, die geodätische und äquidistante Netze zugleich sind, und Fadennetze, die konjugierte und Schmiegtangenten-Netze zugleich sind. Denn im ersten Fall ergeben die Gleichungen (II 5) für $g_1 = g_2 = 0$ und $s = 1$ unmittelbar $\omega =$ konst.; im zweiten Fall ist $n = m = 0$. Beide Fälle liefern daher nach Gleichung (II 4) Trägerflächen mit verschwindendem Gauss schen Krümmungsmaß K, scheiden also gemäß der am Schluß von Kapitel I gemachten Voraussetzung aus.

α) Geodätische Fadennetze, die zugleich konjugierte Fadennetze sind. Gemäß der Forderung, daß jetzt die Gleichungen (III a 1 bis 4) und zugleich (III c 1 bis 4) erfüllt sein müssen, ergeben sich als Gleichgewichtsbedingungen für das Netz:

$$\text{(IV α 1)} \quad s = P(u+v) + Q(u-v), \quad \sigma = 1, \quad \omega = \arccos\frac{P(u+v) - Q(u-v)}{P(u+v) + Q(u-v)},$$

$$\text{(IV α 2)} \quad n_1 = -n_2 = n, \quad m = 0,$$

und als Grundgleichungen für die Trägerfläche:

$$(\text{IV}\,\alpha\,3)\quad \frac{n_v}{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{P'}{P} - \frac{Q'}{Q}\right) - 2\frac{P'-Q'}{P+Q}, \qquad \frac{n_u}{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{P'}{P} + \frac{Q'}{Q}\right) - 2\frac{P'+Q'}{P+Q},$$

$$(\text{IV}\,\alpha\,4)\quad K = -\frac{(P+Q)^2}{4PQ}\,n^2$$
$$= -\frac{1}{4(P+Q)^3}\left\{P\left(2\frac{Q''}{Q} - \frac{Q'^2}{Q^2}\right) + P\left(2\frac{P''}{P} - 3\frac{P'^2}{P^2}\right) + \right.$$
$$\left. + Q\left(2\frac{P''}{P} - \frac{P'^2}{P^2}\right) + Q\left(2\frac{Q''}{Q} - 3\frac{Q'^2}{Q^2}\right)\right\}.$$

Aus den Grundgleichungen (IV α 3) folgt durch Integration

$$(\text{IV}\,\alpha\,5)\qquad n = 2k\frac{\sqrt{PQ}}{(P+Q)^2}$$

mit der Integrationskonstanten $k \neq 0$ (im Fall $k = 0$ wäre $n = 0 = m$, also die Trägerfläche entgegen unserer Voraussetzung eben), so daß das Gausssche Theorema egregium (IV α 4) lautet:

$$(\text{IV}\,\alpha\,6)\qquad P\left(2\frac{Q''}{Q} - \frac{Q'^2}{Q^2}\right) + P\left(2\frac{P''}{P} - 3\frac{P'^2}{P^2} - 4k^2\right) +$$
$$+ Q\left(2\frac{P''}{P} - \frac{P'^2}{P^2}\right) + Q\left(2\frac{Q''}{Q} - 3\frac{Q'^2}{Q^2} - 4k^2\right) = 0.$$

Unser geodätisches und zugleich konjugiertes Fadennetz muß — als konjugiertes Fadennetz — stets auf einer *Minimalfläche* liegen und zwar so, daß die winkelhalbierenden Diagonalkurven des rhombischen u/v-Fadennetzes ein orthogonales $\bar{u}/\bar{v}$-Netz aus den Schmiegtangentenkurven der Trägerfläche darstellen [vgl. Abschnitt III c)]. Da aber unser Fadennetz auch geodätisch sein soll, werden sich für Netz und Trägerfläche noch zusätzliche Eigenschaften ergeben, die jetzt ermittelt werden sollen. Die erste bzw. zweite Grundform der Trägerfläche

$$s^2(u'^2 + 2u'v'\cos\omega + v'^2) \quad \text{bzw.} \quad s^2(n_1u'^2 + 2mu'v' + n_2v'^2)$$

schreibt sich mit Rücksicht auf die Gleichungen (IV α 1), (IV α 2) und (IV α 5):

$$(P+Q)^2\left(u'^2 + 2u'v'\frac{P-Q}{P+Q} + v'^2\right) \quad \text{bzw.} \quad 2k\sqrt{PQ}\,(u'^2 - v'^2).$$

Bei der Parametertransformation $u+v = \bar{u}$, $u-v = \bar{v}$ vom u/v-Fadennetz auf das $\bar{u}/\bar{v}$-Diagonalnetz erhalten wir demgemäß für die beiden Grundformen der Trägerfläche:

$$(\text{IV}\,\alpha\,7)\qquad (P+Q)(P\bar{u}'^2 + Q\bar{v}'^2) \quad \text{bzw.} \quad 2k\sqrt{PQ}\,\bar{u}'\bar{v}',$$

wobei die Funktionen $P(\bar{u})$ und $Q(\bar{v})$, jetzt nur noch von jeweils einem Parameter abhängend, nach wie vor der Funktionalgleichung (IV α 6) genügen.

Wie in einer früheren Arbeit gezeigt wurde[7]), kann diese Funktionalgleichung aber für $k \neq 0$ nur in folgenden beiden Fällen bestehen:

1. $P = -Q =$ konst. Da hierfür nach Gleichung (IV α 7) die erste Grundform verschwindet, scheidet dieser Fall aus.

2. $P =$ konst. *oder* $Q =$ konst.; von diesen beiden gleichberechtigten Möglichkeiten wählen wir $P = C =$ konst., $Q(\bar{v}) \neq$ konst. Wie aus (IV α 7) ersichtlich ist, enthält jetzt keine der sechs Grundgrößen mehr den Parameter $\bar{u}$, d. h. die Trägerfläche muß eine Schraubenfläche (oder Drehfläche) mit den $\bar{u}$-Linien als Bahnschraubenlinien (bzw. Breitenkreisen) sein. Da diese $\bar{u}$-Linien aber zugleich Schmiegtangentenkurven sind, ist unsere gesuchte Trägerfläche notwendig die *Wendelschraubenfläche*. Ihre geradlinigen Erzeugenden und ihre Bahnschraubenlinien müssen also die winkelhalbierenden Diagonalkurven unseres u/v-Fadennetzes sein, schneiden also dessen Netzlinien unter den Winkeln

$$\pm \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2} \arccos \frac{C - Q(\bar{v})}{C + Q(\bar{v})} \quad \text{bzw.} \quad \pm \frac{\pi - \omega}{2}.$$

Da diese Winkel längs einer Schraubenlinie $\bar{v} =$ konst. stets konstant sind, müssen die geodätischen Netzlinien unseres u/v-Fadennetzes durch Verschraubung irgendeines Paares sich schneidender geodätischer Netzlinien auseinander hervorgehen. Weiter ist jetzt ersichtlich, daß es auf einer Wendelschraubenfläche mit Rücksicht auf die einfache Mannigfaltigkeit aller Winkel $\omega(\bar{v})$, die zu irgendeiner Schraubenlinie $\bar{v} =$ konst. gehören, auch ∞^1 verschiedene geodätische und zugleich konjugierte u/v-Netze geben muß.

Daß diese ∞^1 u/v-Netze der Wendelschraubenfläche, welche sämtlich das $\bar{u}/\bar{v}$-Netz der Schmiegtangentenkurven als Diagonalnetz besitzen, tatsächlich im Gleichgewicht befindliche Fadennetze darstellen, wurde bereits in einer früheren Untersuchung[8]) durch direkten Ansatz nachgewiesen.

Wir zeigen jetzt noch, daß es insgesamt ∞^1 formverschiedene, d. h. nicht zueinander ähnliche, geodätische und zugleich konjugierte Fadennetze gibt, und daß wir dabei drei verschiedene Typen unterscheiden können. Da alle Wendelschraubenflächen zueinander ähnlich sind, können wir allen unseren Fadennetzen eine einzige Wendelschraubenfläche mit der reduzierten Ganghöhe $h = 1$ zugrunde legen. Zwei beliebige geodätische Netzlinien, welche irgendein u/v-Fadennetz der Wendelschraubenfläche festlegen, schneiden sich unter dem Winkel $\omega(\bar{v})$ in einem Punkt, dessen Abstand von der Schraubungs-

---

[7]) H. Thomas, Zur Frage des Gleichgewichts von Tschebyscheff-Netzen aus verknoteten und gespannten Fäden. Math. Zeitschr. **47** (1940), S. 73.

[8]) H. Thomas, Über Flächen, auf denen sich besondere Arten von Netzen geodätischer Linien ausbreiten lassen. Math. Zeitschr. **44** (1938), S. 262.

achse mit $r(\bar{v})$ bezeichnet sei. Für diese beiden geodätischen Linien und folglich für alle Netzlinien überhaupt gilt dann der verallgemeinerte Clairautsche Satz:

$$(r^2+1)\sin^2\frac{\omega}{2} = a^2 > 0.$$

Den ∞^1 Werten der Konstanten a^2 entsprechen ∞^1 Fadennetze, und zwar lassen sich je nach dem Betrag von a^2 drei Netztypen unterscheiden:

Erster Netztyp: $a^2 < 1$; dann ist $0 \leqq r < \infty$. Die geodätischen Netzlinien schneiden die Schraubungsachse $r = 0$ unter dem Winkel $\frac{\omega}{2} = \arcsin a$; das Netz erstreckt sich also über die ganze Wendelschraubenfläche.

Zweiter Netztyp: $a^2 > 1$; dann ist $\sqrt{a^2-1} < r < \infty$. Die geodätischen Netzlinien berühren die Schraubenlinie vom Radius $r = \sqrt{a^2-1}$ (denn für diesen r-Wert wird der Schnittwinkel $\omega = \pi$); das Netz erstreckt sich also über den ganzen Bereich auf der Wendelschraubenfläche außerhalb dieser Schraubenlinie.

Dritter Netztyp: $a^2 = 1$; dann ist $0 < r < \infty$. Die geodätischen Netzlinien berühren asymptotisch die Schraubungsachse $r = 0$ (denn für diesen r-Wert wird der Schnittwinkel $\omega = \pi$); das Netz erstreckt sich also über die ganze Wendelschraubenfläche mit Ausnahme der Schraubungsachse selbst.

Fig. 1.

Zusammenfassend hat man also folgendes Ergebnis:

Ein Fadennetz mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur, das geodätisches und konjugiertes Netz zugleich ist, besitzt als Trägerfläche stets eine Wendelschraubenfläche. Es gibt ∞^1 formverschiedene derartige Netze, wobei sich drei Netztypen unterscheiden lassen. Die beiden Scharen der winkelhalbierenden Kurven unserer Netzlinien bestehen stets aus den geradlinigen Erzeugenden und den Bahnschraubenlinien der Wendelschraubenfläche.

Zur Veranschaulichung dieser Fadennetze dient das abgebildete Modell der Wendelschraubenfläche; die Netzform entspricht dabei dem ersten Typ.

β) Äquidistante Fadennetze, die zugleich Schmiegtangenten-Fadennetze sind. Gemäß der Forderung, daß jetzt die Gleichungen (III b 1 bis 4)

und (III d 1 bis 4) zugleich erfüllt sein müssen, ergeben sich als Gleichgewichtsbedingungen für das Netz:

$$(\text{IV}\,\beta\,1)\quad s = 1,\quad \sigma = P(u+v) + Q(u-v),\quad \omega = \arccos\frac{Q(u-v) - P(u+v)}{Q(u-v) + P(u+v)},$$

$$(\text{IV}\,\beta\,2)\qquad n = 0,$$

und als Grundgleichungen für die Trägerfläche:

$$(\text{IV}\,\beta\,3)\qquad \frac{m_u}{m} = \frac{1}{2}\left(\frac{P'}{P} - \frac{Q'}{Q}\right)\frac{Q-P}{Q+P},\qquad \frac{m_v}{m} = \frac{1}{2}\left(\frac{P'}{P} + \frac{Q'}{Q}\right)\frac{Q-P}{Q+P},$$

$$(\text{IV}\,\beta\,4)\qquad K = -\frac{(P+Q)^2}{4PQ}m^2$$

$$= -\frac{1}{4(P+Q)}\left\{P\left(2\frac{Q''}{Q} - \frac{Q'^2}{Q^2}\right) + P\left(2\frac{P''}{P} - 3\frac{P'^2}{P^2}\right) + \right.$$

$$\left. + Q\left(2\frac{P''}{P} - \frac{P'^2}{P^2}\right) + Q\left(2\frac{Q''}{Q} - 3\frac{Q'^2}{Q^2}\right)\right\}.$$

Aus den Gleichungen (IV β 3) folgt durch Integration

$$(\text{IV}\,\beta\,5)\qquad m = 2k\frac{\sqrt{PQ}}{P+Q}$$

mit der Integrationskonstanten $k \neq 0$ (im Fall $k = 0$ wäre $m = 0 = n$, also die Trägerfläche entgegen unserer Voraussetzung eben), so daß wir für das Gausssche Theorema egregium (IV β 4) jetzt

$$(\text{IV}\,\beta\,6)\qquad P\left(2\frac{Q''}{Q} - \frac{Q'^2}{Q^2}\right) + P\left(2\frac{P''}{P} - 3\frac{P'^2}{P^2} - 4k^2\right) +$$

$$+ Q\left(2\frac{P''}{P} - \frac{P'^2}{P^2}\right) + Q\left(2\frac{Q''}{Q} - 3\frac{Q'^2}{Q^2} - 4k^2\right) = 0$$

und für das Gausssche Krümmungsmaß

$$K = -k^2 = \text{konst.}$$

erhalten. Die Trägerfläche unseres Fadennetzes ist also eine *Fläche konstanter negativer Krümmung*. Zu ihrer genaueren Bestimmung führen wir durch die Parametertransformation $u + v = \bar{u}$, $u - v = \bar{v}$ unser rhombisches u/v-Fadennetz aus den Schmiegtangentenkurven in sein orthogonales $\bar{u}/\bar{v}$-Diagonalnetz aus den Krümmungslinien der Trägerfläche über. Hierbei gehen die beiden Grundformen der Trägerfläche [vgl. die Gleichungen (IV β 1), (IV β 2) und (IV β 5)]

$$u'^2 + 2u'v'\frac{Q-P}{Q+P} + v'^2 \quad \text{bzw.} \quad 4k\frac{\sqrt{PQ}}{P+Q}u'v'$$

über in

$$(\text{IV}\,\beta\,7)\qquad \frac{1}{P+Q}(Q\bar{u}'^2 + P\bar{v}'^2) \quad \text{bzw.} \quad k\frac{\sqrt{PQ}}{P+Q}(\bar{u}'^2 - \bar{v}'^2),$$

wobei die Funktionen $P(\bar{u})$ und $Q(\bar{v})$, jetzt nur noch von jeweils einem Parameter abhängend, nach wie vor der Funktionalgleichung (IV β 6) genügen. Diese Funktionalgleichung ist identisch mit der im vorangehenden Abschnitt betrachteten Funktionalgleichung (IV α 6), kann also für $k \neq 0$ wieder nur in den folgenden beiden Fällen bestehen:

1. $P = -Q =$ konst. Da hierfür nach Gleichung (IV β 7) die erste Grundform unendlich wird, scheidet dieser Fall aus.

2. $P =$ konst. *oder* $Q =$ konst.; von diesen beiden gleichberechtigten Möglichkeiten wählen wir wieder $P = C =$ konst., $Q(\bar{v}) \neq$ konst. Wie aus (IV β 7) ersichtlich ist, enthält jetzt keine der sechs Grundgrößen mehr den Parameter $\bar{u}$, d. h. die Trägerfläche muß eine Drehfläche (oder Schraubenfläche) mit den $\bar{u}$-Linien als Breitenkreisen (bzw. Bahnschraubenlinien) sein. Da diese $\bar{u}$-Linien aber zugleich Krümmungslinien sind, ist unsere gesuchte Fläche notwendig eine *Drehfläche.*

Daß tatsächlich die Schmiegtangentennetze *aller* Drehflächen konstanter negativer Krümmung im Gleichgewicht befindliche Fadennetze darstellen, wurde bereits in einer früheren Untersuchung[7]) durch direkten Ansatz nachgewiesen.

Wir haben somit folgendes Ergebnis:

Ein Fadennetz mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur, das äquidistantes und Schmiegtangenten-Netz zugleich ist, besitzt als Trägerfläche stets eine Drehfläche konstanter negativer Krümmung. Entsprechend den ∞^1 formverschiedenen Trägerflächen gibt es ∞^1 formverschiedene derartige Netze, wobei sich entsprechend den drei Typen der Trägerfläche auch drei Netztypen unterscheiden lassen. Die beiden Scharen der winkelhalbierenden Kurven unserer Netzlinien bestehen stets aus den Meridiankurven und Breitenkreisen der Drehfläche.

Modelle zur Veranschaulichung dieser Fadennetze sind in der erwähnten Arbeit[7]) abgebildet.

γ) Geodätische Fadennetze, die zugleich Schmiegtangenten-Fadennetze sind. Da geodätische Schmiegtangentenkurven stets Gerade sein müssen, und da Netze aus zwei Geradenscharen nur auf den negativ gekrümmten Flächen zweiter Ordnung existieren, hat man hier nur das triviale Ergebnis:

Ein Fadennetz mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur, das geodätisches und Schmiegtangenten-Netz zugleich ist, besteht stets aus den beiden Geradenscharen einer negativ gekrümmten Fläche zweiter Ordnung[9]).

δ) Äquidistante Fadennetze, die zugleich konjugierte Fadennetze sind. Gemäß der Forderung, daß jetzt die Gleichungen (III b 1 bis 4) und (III c 2) zugleich erfüllt sein müssen, ergeben sich als Gleichgewichtsbedingungen für das Netz:

$$\text{(IV } \delta \text{ 1)} \quad s = 1, \quad \sigma = P(u+v) + Q(u-v), \quad \omega = \arccos \frac{Q(u-v) - P(u+v)}{Q(u-v) + P(u+v)},$$

$$\text{(IV } \delta \text{ 2)} \qquad n_1 = -n_2 = n, \quad m = 0,$$

[9]) Dieser Satz gilt natürlich auch für Netze mit allgemeiner Spannungsverteilung und allgemeiner Netzstruktur.

und als Grundgleichungen für die Trägerfläche:

$$\text{(IV}\,\delta\,3)\qquad \frac{n_v}{n} = -\frac{1}{2}\left(\frac{P'}{P} - \frac{Q'}{Q}\right), \qquad \frac{n_u}{n} = -\frac{1}{2}\left(\frac{P'}{P} + \frac{Q'}{Q}\right),$$

$$\text{(IV}\,\delta\,4)\qquad K = -\frac{(P+Q)^2}{4PQ}n^2$$

$$= -\frac{1}{4(P+Q)}\left\{P\left(2\frac{Q''}{Q} - \frac{Q'^2}{Q^2}\right) + P\left(2\frac{P''}{P} - 3\frac{P'^2}{P^2}\right) + \right.$$

$$\left. + Q\left(2\frac{P''}{P} - \frac{P'^2}{P^2}\right) + Q\left(2\frac{Q''}{Q} - 3\frac{Q'^2}{Q^2}\right)\right\}.$$

Unser äquidistantes und zugleich konjugiertes Fadennetz muß — als konjugiertes Fadennetz — stets auf einer *Minimalfläche* liegen und zwar so, daß die winkelhalbierenden Diagonalkurven des rhombischen Fadennetzes ein orthogonales Netz aus den Schmiegtangentenkurven der Trägerfläche darstellen. Da aber unser Fadennetz auch äquidistant sein soll, werden sich für Netz und Trägerfläche noch zusätzliche Eigenschaften ergeben, von denen einige grundlegende jetzt angegeben werden sollen. Aus den Gleichungen $s^2 = \mathfrak{x}_u \cdot \mathfrak{x}_u = \mathfrak{x}_v \cdot \mathfrak{x}_v = 1$ ergibt sich durch partielle Ableitung: $\mathfrak{x}_{uv} \cdot \mathfrak{x}_u = 0$ und $\mathfrak{x}_{uv} \cdot \mathfrak{x}_v = 0$. Aus den beiden letzten Gleichungen und der Beziehung $ms^4 \sin\omega = \mathfrak{x}_{uv} \cdot (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v) = 0$ folgt dann $\mathfrak{x}_{uv} = \mathfrak{o}$, d. h. $\mathfrak{x} = \mathfrak{A}(u) + \mathfrak{B}(v)$, wobei die beiden Vektoren $\mathfrak{A}(u)$ und $\mathfrak{B}(v)$ willkürliche, nicht konstante Funktionen der angegebenen Parameter sind. In unserem äquidistanten und zugleich konjugierten Fadennetz müssen demgemäß die Kurven jeder Schar durch Rückung (Translation) längs der Kurven der anderen Schar auseinander hervorgehen, d. h. die Trägerfläche muß eine *Rückungsfläche* (Translationsfläche) sein.

Wir haben somit folgendes vorläufige Ergebnis:

Ein Fadennetz mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur, das äquidistantes und konjugiertes Netz zugleich ist, muß eine Trägerfläche besitzen, die Rückungsfläche und Minimalfläche zugleich ist, d. h. die Wendelschraubenfläche oder eine Scherksche *Minimalfläche*[10]. *Dabei müssen die beiden (orthogonalen) Scharen der winkelhalbierenden Kurven unserer Netzlinien aus den Schmiegtangentenkurven dieser Flächen bestehen.*

Daß die Wendelschraubenfläche und die Scherkschen Minimalflächen tatsächlich stets Trägerflächen von äquidistanten und zugleich konjugierten Fadennetzen sind, soll in einer weiteren Arbeit: „Zur Frage des Gleichgewichts von Viereckshetzen aus verknoteten und gespannten Fäden (Zweiter Teil)“ gezeigt werden, in der dann auch weitere Eigenschaften dieser äquidistanten und zugleich konjugierten Fadennetze (Tschebyscheff-Rückungsnetze) untersucht werden sollen.

[10]) Vgl. Sophus Lie, Weitere Untersuchungen über Minimalflächen. Arch. for Mathematik og Naturvidenskab, Band IV (1880), S. 477.

(Eingegangen am 16. Oktober 1941.)

Über Lösungen linearer Differentialgleichungen mit Asymptoten.

Von

Otto Haupt in Erlangen.

1.1. In einer kürzlich erschienenen Arbeit[1]) gibt Herr Bitterlich-Willmann je eine hinreichende Bedingung an dafür, daß die Lösungen der Differentialgleichung

(L_0) $\qquad y'' + f(x)\, y = 0$ mit stetigem $f(x)$ in $[a, +\infty)$

entweder (**I.**) sämtlich Asymptoten besitzen oder daß, soweit überhaupt Asymptoten vorhanden sind, diese (**II.**) stets parallel zur x-Achse sind bzw. (**III.**) stets in die x-Achse selbst fallen. Als kennzeichnend dafür, daß eine in $[a, +\infty)$ eindeutige, stetig differenzierbare Funktion $y = y(x)$ eine Asymptote, genauer: asymptotische Gerade, besitzt, wird dabei erklärt: Es sollen

(B_0) $$\lim_{x \to +\infty} \left(y(x) - x y'(x)\right)$$

und

(B_1) $$\lim_{x \to +\infty} y'(x)$$

beide existieren (und endlich sein).

1.2. In einer früheren Note[2]) wurde gezeigt, daß (B_1) eine Folge von (B_0) ist und daß für die Gültigkeit von (B_0) folgendes notwendig und hinreichend ist:

(A) Es gibt eine in $[a, +\infty)$ stetige Funktion $\varphi(x)$, für welche

(A_1) $$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = C_0 \text{ existiert und endlich ist;}$$

ferner (für beliebiges b mit $b \geqq a > 0$) die Darstellung gilt:

(A_2) $$y(x) = x \cdot \Big(C + \int_x^{+\infty} \varphi(\tau)\, \tau^{-2}\, d\tau\Big) = x \cdot \Big(c - \int_b^x \varphi(\tau)\, \tau^{-2}\, d\tau\Big),$$

unter

$$C = c - \int_b^{+\infty} \varphi(\tau)\, \tau^{-2}\, d\tau$$

eine geeignet gewählte Konstante verstanden.

---

[1]) J. Bitterlich-Willmann, Über die Asymptoten der Lösungen einer Differentialgleichung. Monatsh. f. Math. u. Phys. **50** (1941), S. 35—39.

[2]) Haupt, Über Asymptoten ebener Kurven. Journ. f. d. r. u. angew. Math. **152** (1922), S. 6—10 und S. 239.

Übrigens hat die asymptotische Gerade von $y(x)$ dann die Gleichung

$$(A_3) \qquad Y = CX + C_0$$

mit

$$C_0 = \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to +\infty} x \cdot \Big(\int_x^{+\infty} \varphi(\tau)\, \tau^{-2}\, d\tau \Big).$$

Mittels (A_2) erhält man nun eine notwendige und zugleich hinreichende Bedingung dafür, daß z. B. Lösungen y der allgemeinen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(L) \qquad y'' + g(x)\, y' + f(x)\, y = h(x)$$

mit in $[a, +\infty)$ eindeutigen stetigen $g(x)$, $f(x)$ und $h(x)$

Asymptoten besitzen; genauer gesagt: Man erhält eine lineare Integralgleichung für $\varphi(x)$ (vgl. Nr. 2. 1.), durch deren stetige, (A_1) erfüllende Lösungen $\varphi(x)$ vermittelst (A_2) alle und nur diejenigen Lösungen y von (L) geliefert werden, welche Asymptoten besitzen.

Aus dieser Integralgleichung ergeben sich dann sehr einfach *hinreichende* Bedingungen z. B. für das Vorhandensein von Lösungen von (L), welche Asymptoten besitzen. Und zwar sind die von uns erhaltenen Bedingungen Verallgemeinerungen der von Herrn Bitterlich-Willmann angegebenen Kriterien; dabei ergibt sich noch, daß sein Kriterium II. durch eine Existenz- und Eindeutigkeitsaussage ergänzt werden kann (vgl. dazu Nr. 2. 3. 1., Bemerkung, sowie Nr. 2. 3., Anmerkung; für die beiden anderen Kriterien vgl. auch Nr. 2. 2., Anmerkung 2, und Nr. 2. 4., Anmerkung)[2a]).

1. 3. Auf folgende Verallgemeinerungsmöglichkeiten sei noch hingewiesen:

Zunächst läßt sich mit Hilfe von (A) (Nr. 1. 2.) analog die Frage in Angriff nehmen nach den Lösungen einer linearen Differentialgleichung k-ter Ordnung ($k \geqq 1$), welche asymptotische Geraden besitzen. Man gelangt dabei zu einer linearen Integro-Differentialgleichung für φ, auf deren Auflösung das Problem zurückgeführt wird.

2a) Bemerkung bei der Korrektur. Wie in einer inzwischen zu unserer Kenntnis gelangten Arbeit von D. Caligo (Comportamento asintotico degli integrali usw., Boll. Un. Mat. Ital., Ser. II, Anno III, Nr. 4 (1941), S. 286 ff.) u. a. erwähnt wird, existiert nach U. Dini bzw. G. Sansone für (L) im Spezialfall $h(x) = 0$, $f(x) = O(x^{-3-\beta})$, $\beta > 0$, und $g(x) = O(x^{-2-\alpha})$, $\alpha > 0$, bzw. $g(x) = 0$ für jede Lösung y eine Darstellung $y = c_1 x + c_2 + \eta(x)$ mit konstanten c_1, c_2 und mit $\eta \to 0$ für $x \to +\infty$. Dies besagt, sogar zusammen mit der Existenz von $\lim_{x \to +\infty} x^{-1} y = \lim_{x \to +\infty} y'$ (vgl. Caligo, a. a. O.), weniger als die (aus Nr. 2. 2. bzw. 1. 1. oben im Text folgende) Gültigkeit von (B_0).

Darüber hinaus läßt sich die Darstellung (A) von y in Nr. 1. 2. auf den Fall von Asymptoten höherer Ordnung, genauer gesagt: auf den Fall asymptotischer Parabeln n-ten Grades ($n \geqq 1$) verallgemeinern[3]). Es werden nämlich alle und nur die n-mal stetig differenzierbaren ebenen Kurven $y = y(x)$, welche eine asymptotische Parabel n-ten Grades besitzen, geliefert durch

$$y(x) = x \cdot \Big[\sum_{\nu=0}^{n-1} C_\nu x^\nu - \frac{1}{(n-1)!} \int_b^x (x-\tau)^{n-1} \varphi(\tau)\, \tau^{-(n+1)}\, d\tau\Big],$$

wo $\varphi(x)$ stetig ist in $[a, +\infty)$ und der Bedingung (A_1) genügt, wobei ferner $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$ beliebig wählbare Konstanten sind. Damit ergibt sich die Frage nach all denjenigen Lösungen linearer Differentialgleichungen sowie linearer Differentialgleichungensysteme, welche asymptotische Parabeln vorgegebenen Grades besitzen.

Ein näheres Eingehen auf diese Fragen sowie auf die genauere Untersuchung der auftretenden Integro-Differentialgleichungen[4]) sei späterer Gelegenheit vorbehalten.

2. Wir gehen zur Ausführung der in Nr. 1. 2. angedeuteten Sätze und ihrer Beweise über. Die hierbei auftretenden eigentlichen bzw. uneigentlichen Integrale sind ausnahmslos Riemannsche, erstreckt über ein Intervall, bzw. Limiten[5]) solcher Integrale, wenn die eine Integrationsgrenze gegen $+\infty$ geht. Eine Funktion $F(x)$ wird als integrierbar bzw. als absolut integrierbar, genauer als uneigentlich bzw. als absolut uneigentlich integrierbar bezeichnet, wenn das betreffende uneigentliche Integral von $F(x)$ bzw. von $|F(x)|$ existiert.

2. 1. Es sei also gegeben

$$(L) \qquad y'' + g(x)y' + f(x)y = h(x),$$

wo die g, f, h eindeutig und *stetig* sein sollen in $[a, +\infty)$. Jede Lösung y von (L) ist daher zweimal stetig differenzierbar. Ferner sei im folgenden stets $a > 0$.

Alle und nur diejenigen Lösungen y von (L), welche den Bedingungen (A_1), (A_2) in Nr. 1. 2. genügen, besitzen eine Asymptote. Daraus ergibt sich der

Satz: *Vermittelst der Darstellung* (A_2) *in Nr.* 1. 2. *erhält man alle Lösungen* y *von* (L), *welche eine Asymptote besitzen, indem man (nach beliebiger*

[3]) A. a. O. [2]), S. 8ff.

[4]) Vgl. dazu auch Enzykl. math. Wiss. II, 3, 2 (= II C 13), S. 1494.

[5]) *Alle* in vorliegender Arbeit auftretenden *Limiten* sind als *eigentlich* (endlich) vorausgesetzt.

Wahl einer Zahl b mit $b \geqq a > 0$) alle Konstanten c und c_1 sowie alle stetigen $\varphi(x)$ bestimmt, die den folgenden beiden Bedingungen (V) *und* (A_1) *genügen*:

$$(V) \quad \varphi(x) + \int_b^x g(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi + \int_b^x [\xi g(\xi) + \xi^2 f(\xi)]\Big(\int_b^\xi \varphi(\tau)\,\tau^{-2}\,d\tau - c\Big)\,d\xi$$

$$= c_1 - \int_b^x \xi\, h(\xi)\,d\xi,$$

$$(A_1) \qquad \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) \text{ existiert.}$$

Beweis **I.** Es sei y eine Lösung von (L) mit Asymptote, also gemäß (A_2) (Nr. 1. 2.) darstellbar, wobei noch (A_1) erfüllt sein muß. Aus (A_2) folgt dann, daß

$$(2.\,1.) \qquad y' = (y - \varphi)\cdot x^{-1}, \quad y'' = -\varphi'\cdot x^{-1},$$

wobei φ' (wegen der Existenz und Stetigkeit von y'') existiert und stetig ist. Setzt man jetzt für y, y', y'' die Ausdrücke aus (A_2) und (2. 1.) in (L) ein und integriert von b bis x, so ergibt sich (V); dabei ist $c_1 = \varphi(b)$.

II. Umgekehrt: Es sei $\varphi(x)$ stetig in $[b, +\infty)$ und Lösung der Integralgleichung (V). Dann ist φ auch stetig differenzierbar. Führt man nun in die durch Differentiation von (V) nach x sich ergebende Beziehung wieder y, y' und y'' vermöge (A_2) bzw. (2. 1.) ein, so ergibt sich (L). Ist also für eine stetige Lösung φ von (V) noch (A_1) erfüllt, so liefert φ durch (A_2) eine Lösung y von (L) mit Asymptote.

2. 1. 1. *Die in* (V) *auftretenden Konstanten c und c_1 sind mit den Werten von y und y' in $x = b$ folgendermaßen verknüpft*:

$$(2.\,1.\,1.) \qquad \begin{aligned} y(b) &= c\cdot b \\ y'(b) &= (y(b) - c_1)\cdot b^{-1}. \end{aligned}$$

Die c, c_1 und die $y(b)$, $y'(b)$ bestimmen sich also insbesondere gegenseitig eindeutig.

In der Tat: Aus (V) folgt $\varphi(b) = c_1$ und daraus in Verbindung mit (2. 1.) die zweite Gleichung (2. 1. 1.). Die erste Gleichung ergibt sich aus (A_2) (Nr. 1. 2.).

2. 1. 2. Zur Abkürzung späterer Beweise möge der Hinweis auf folgende bekannte Tatsachen dienen:

I. Ist $\varphi(x)$ stetig in $[b, +\infty)$ und ist (A_1) (Nr. 2. 1.) erfüllt, d. h. existiert $\lim_{x \to \infty} \varphi(x)$, so ist $\varphi(x)$ in $[b, +\infty)$ beschränkt.

II. Ist $F(x)$ absolut integrierbar, ist ferner $\varphi(x)$ stetig und beschränkt in $[b, +\infty)$, so ist auch $F(x)\,\varphi(x)$ absolut integrierbar.

III. Ist $F(x)$ absolut integrierbar, so existiert $\lim\limits_{x \to +\infty} \int\limits_b^x F(\xi)\, d\xi$.

IV. Ist $\varphi(x)$ stetig und beschränkt, etwa $|\varphi(x)| \leqq M$, in $[b, +\infty)$, so gilt, falls $0 < b < x$,

$$\Big|\int\limits_b^x \varphi(\tau)\, \tau^{-2}\, d\tau\Big| < M \cdot b^{-1} \quad \text{und} \quad \Big|\int\limits_x^{+\infty} \varphi(\tau)\, \tau^{-2}\, d\tau\Big| \leqq M \cdot x^{-1}.$$

2.2. Zunächst beweisen wir den

Satz. *Damit jede Lösung von* (L) *eine Asymptote besitze, ist hinreichend, daß* $r(x) = xg(x) + x^2 f(x)$, $g(x)$ *und* $xh(x)$ *(stetig in* $[a, +\infty)$ *und) absolut integrierbar*[6]) *sind.*

1. Anmerkung. Der vorstehende Satz läßt sich auch so aussprechen: Unter den angegebenen Voraussetzungen ist für den Grundbereich $[a, +\infty)$ *eindeutig lösbar die* Randwertaufgabe *für* (L), *der gemäß* $y'(x)$ *und* $(y(x) - xy'(x))$ *für* $x = a$ *(beliebig) gegebene Werte annehmen und für* $x \to +\infty$ *beide konvergieren.*

2. Anmerkung. Das in Nr. 1. 1. erwähnte Kriterium I. von Herrn Bitterlich-Willmann entspricht dem Falle, daß $g(x) = h(x) = 0$ in $[a, +\infty)$ und daß $f(x) = O(x^{-3-\alpha})$ mit $\alpha > 0$. Dieses Kriterium ist ein Spezialfall unseres vorstehenden Satzes.

Beweis 1. Es genügt, folgendes zu zeigen: Ist b geeignet gewählt und dann festgehalten, so besitzt (V) für beliebig vorgegebene c, c_1 eine Lösung, welche (A_1) genügt. Denn durch jede solche Lösung wird eine Lösung von (L) mit Asymptote geliefert (Nr. 2. 1.), und zwar können, wenn die c, c_1 frei wählbar sind, die $y(b)$, $y'(b)$ beliebig vorgeschrieben werden (gemäß Nr. 2. 1. 1.); man erhält also tatsächlich *alle* Lösungen von (L).

2. Daß (V) für beliebige c, c_1 eine, der Bedingung (A_1) genügende Lösung φ besitzt, ergibt sich in bekannter Weise durch schrittweise Näherung folgendermaßen.

Nach Voraussetzung existieren, wenn wieder $r(x) = xg(x) + x^2 f(x)$ gesetzt wird,

$$G(b) = \int\limits_b^{+\infty} |g(\xi)|\, d\xi, \quad F(b) = a^{-1} \cdot \int\limits_b^{+\infty} |r(\xi)|\, d\xi$$

für jedes b mit $a \leqq b$ und konvergieren mit $b \to +\infty$ gegen Null. Wir können und wollen daher b so (groß) wählen, daß

(b) $\qquad q = G(b) + F(b) \leqq 2^{-1}$ und gleichzeitig $a \leqq b$ ist.

---

[6]) Die Behauptung bleibt — unter im übrigen unveränderten Voraussetzungen — richtig, wenn $xh(x)$ nur als integrierbar angenommen wird (*nicht* als *absolut* integrierbar).

Von jetzt ab *halten wir b fest* und schreiben (V) in der Gestalt

$$(V_{22}) \qquad \varphi(x) = J(x;\,\varphi) + H(x;\,c,\,c_1),$$

wobei $b \leqq x$ und

$$J(x;\,\varphi) = -\int_b^x g(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi - \int_b^x r(\xi)\left(\int_b^\xi \varphi(\tau)\,\tau^{-2}\,d\tau\right)d\xi,$$

$$H(x;\,c,\,c_1) = c_1 + c\int_b^x r(\xi)\,d\xi - \int_b^x \xi\,h(\xi)\,d\xi.$$

Für jede in $[b, +\infty)$ stetige (und (A_1) genügende) Funktion $\varphi(x)$ gilt die Abschätzung

$$(J) \qquad |J(x;\,\varphi)| \leqq p \cdot q \text{ für jedes } x \text{ in } [b, +\infty),$$

wobei

$$|\varphi(x)| \leqq p \text{ in } [b, +\infty);$$

dies folgt aus den Voraussetzungen unter Berücksichtigung von (b), insbesondere $b \geqq a > 0$, mit Hilfe von Nr. 2. 1. 2., insbesondere IV.

Nunmehr setzen wir

$$\varphi_0(x) = 1,\ \varphi_\nu(x) = J(x;\,\varphi_{\nu-1}) + H(x;\,c,\,c_1) \text{ in } [b, +\infty),\quad \nu = 1, 2, \ldots.$$

Mittels vollständiger Induktion nach ν folgt, in Rücksicht auf die Voraussetzungen bei dem zu beweisenden Satz sowie auf Nr. 2. 1. 2.: Die $\varphi_\nu(x)$ sind sämtlich stetig differenzierbar in $[b, +\infty)$ und es ist (A_1) für sie erfüllt, es ist also insbesondere $\varphi_\nu(x)$ beschränkt in $[b, +\infty)$. All dies gilt auch für

$$\psi_\nu(x) = \varphi_\nu(x) - \varphi_{\nu-1}(x), \qquad \nu = 1, 2, \ldots,$$

so daß insbesondere

$$(p) \qquad 0 \leqq p_\nu < +\infty, \text{ wenn } p_\nu = \overline{\underset{b \leq x}{\text{Grenze}}}\,|\psi_\nu(x)|, \qquad \nu = 1, 2, \ldots.$$

Wegen der Linearität von $J(x;\,\varphi)$ bezüglich φ gilt

$$\psi_\nu(x) = J(x;\,\psi_{\nu-1}), \qquad \nu = 2, 3, \ldots.$$

Aus (J) und (p) ergibt sich mithin $p_\nu \leqq p_{\nu-1} \cdot q$, $\nu = 2, 3, \ldots$, also

$$p_n \leqq p_1 \cdot q^{n-1}, \qquad n = 2, 3, \ldots.$$

Wegen $q \leqq 2^{-1}$ (vgl. (b)) sind daher die

$$\varphi_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{\nu=1}^{n} \psi_\nu(x), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

in $[b, +\infty)$ gleichmäßig beschränkt und sie konvergieren dort gleichmäßig. Insbesondere ist also

$$\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x)$$

stetig und beschränkt in $[b, +\infty)$ und es ist (A_1) für $\varphi(x)$ erfüllt. Zufolge der gleichmäßigen Konvergenz ist überdies

$$J(x;\, \varphi) = \lim_{n \to \infty} J(x;\, \varphi_n).$$

Daher ist $\varphi(x)$ eine stetige Lösung von (V_{22}), für welche (A_1) gilt. Weil c und c_1 beliebig gegeben waren, ist alles bewiesen.

2. 3. Wir lassen jetzt die Voraussetzung der (absoluten) Integrierbarkeit von $r(x)$ fallen und zeigen zunächst:

Es seien $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ stetig in $[a, +\infty)$. Ferner sei $r(x) = xg(x) + x^2 f(x)$ nicht-negativ oder nicht-positiv für alle hinreichend großen x. Schließlich seien $g(x)$ und $xh(x)$ absolut integrierbar[6]*, hingegen sei $r(x)$ nicht integrierbar.*

Besitzt dann eine Lösung y von (L) *eine Asymptote, so muß diese Asymptote parallel zur x-Achse sein.*

Anmerkung. Das in Nr. 1. 1. erwähnte Kriterium II. von Herrn Bitterlich-Willmann entspricht dem Falle, daß $g(x) = h(x) = 0$ in $[a, +\infty)$ und daß $D_1 x^{-3} < |f(x)| < D_2 x^{-2-\beta}$ für alle genügend großen x, wobei $\beta > 0$ und D_1, D_2 positive Konstanten. Dieses Kriterium ist Spezialfall unseres vorstehend angegebenen (vgl. auch Nr. 2. 3. 1., Bemerkung).

Beweis. Ist $\varphi(x)$ stetig und ist (A_1) für $\varphi(x)$ erfüllt, so ist $\Phi(x)$ stetig und es existiert

$$\Phi_0 = \lim_{x \to \infty} \Phi(x), \text{ wobei } \Phi(x) = c - \int_b^x \varphi(\tau)\, \tau^{-2}\, d\tau\,.$$

Ist $\varphi(x)$ überdies Lösung von (V) (vgl. Nr. 2. 1.), so muß $r(x)\, \Phi(x)$ integrierbar sein, weil zufolge unserer Voraussetzungen alle übrigen, in (V) auftretenden Glieder für $x \to +\infty$ konvergieren. Da aber $r(x)$ nach Voraussetzung nicht integrierbar ist und nicht zweierlei Vorzeichen annimmt, so folgt aus der Integrabilität von $r(x)\, \Phi(x)$, daß $\Phi_0 = 0$ ist. Zufolge Nr. 1. 2., (A_2) und (A_3) ist daher $Y = C_0$ die Gleichung der Asymptote, w. z. b. w.

2. 3. 1. Die in Nr. 2. 3. gemachte Feststellung läßt sich zu einer Existenz- und Eindeutigkeitsaussage verschärfen, wenn man noch absolute Integrierbarkeit von $s(x) = x^{-1} r(x) = g(x) + x f(x)$ fordert. Es gilt nämlich der

Satz. *Es seien $g(x)$, $xh(x)$ und $s(x) = g(x) + x f(x)$ (stetig und) absolut integrierbar*[6]*. Hingegen sei $r(x) = x s(x)$ nicht integrierbar und es sei $s(x) \geqq 0$ oder $s(x) \leqq 0$ für alle hinreichend großen x.*

Dann existiert zu beliebig vorgegebenem $(y(b) - b y'(b))$ genau eine Lösung von (L) *mit Asymptote; und diese Asymptote ist parallel zur x-Achse. Dabei ist b hinreichend groß, im übrigen aber beliebig gewählt.*

Anmerkung. Der vorstehende Satz läßt sich dahin aussprechen: Unter den angegebenen Voraussetzungen ist *für* (L) *in $[b, +\infty)$ eindeutig*

lösbar die Randwertaufgabe, *der gemäß* $(y(x) - xy'(x))$ *für* $x = b$ *einen beliebig vorgegebenen Wert annimmt und für* $x \to +\infty$ *konvergiert.*

Beweis. Zufolge der über $g(x)$ und $s(x) = g(x) + xf(x)$ gemachten Voraussetzungen existieren

$$G^*(b) = \int_b^{+\infty} |g(\xi)|\, d\xi \quad \text{und} \quad F^*(b) = \int_b^{+\infty} |s(\xi)|\, d\xi,$$

und es läßt sich durch Wahl eines hinreichend großen b stets erreichen, daß

(b) $$q = G^*(b) + F^*(b) \leqq 2^{-1}, \quad \text{wobei } a \leqq b.$$

Da zufolge Nr. 2. 3. für jede stetige Lösung $\varphi(x)$ von (V), für welche (A_1) erfüllt ist, jetzt $C = 0$ (vgl. Nr. 1. 2., (A_3)) sein muß, so können wir, in Rücksicht auf Nr. 1. 2., (A_2), die Integralgleichung (V) so schreiben:

(V_{231}) $$\varphi(x) = J_1(x;\, \varphi) + H(x;\, c_1),$$

wobei

$$J_1(x;\, \varphi) = -\int_b^x g(\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi + \int_b^x \xi s(\xi) \Big(\int_\xi^{+\infty} \varphi(\tau)\, \tau^{-2}\, d\tau \Big) d\xi,$$

$$H(x;\, c_1) = c_1 - \int_b^x \xi\, h(\xi)\, d\xi.$$

Für jede in $[b, +\infty)$ stetige und (A_1) genügende Funktion $\varphi(x)$ haben wir wieder, wie in Nr. 2. 2., die Abschätzung (J), wenn dort $J(x;\, \varphi)$ durch $J_1(x;\, \varphi)$ ersetzt wird; denn für solche $\varphi(x)$ ist jetzt $\Big| xs(x) \Big(\int_x^{+\infty} \varphi(\tau)\, \tau^{-2}\, d\tau \Big) \Big|$ $\leqq p \cdot |s(x)|$. Bei beliebig vorgegebenem $c_1 = y(b) - by'(b)$ (vgl. Nr. 2. 1. 1.) kann man daher, genau wie in Nr. 2. 2. für (V), hier für (V_{231}), die Existenz der gesuchten Lösung φ mittels schrittweiser Näherung, ausgehend von $\varphi_0(x) = 1$, beweisen.

Die *Eindeutigkeit* dieser Lösung ergibt sich in bekannter Weise so: Sind $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ zwei Lösungen von (V_{231}), welche zum gleichen c_1 gehören und für welche (A_1) erfüllt ist, so gilt für $d(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ neben (A_1) die Beziehung $d(x) = J_1(x, d)$. Da $M = \overline{\text{Grenze}}_{b \leqq x} |d(x)| < +\infty$ (wegen (A_1)), so folgt aus (J), daß $0 \leqq M \leqq M \cdot q$ und, wegen $q \leqq 2^{-1}$, daß $M = 0$, also $d(x) = 0$ in $[b, +\infty)$, w. z. b. w.

Bemerkung. Bei dem in Nr. 2. 3., angegebenen Kriterium II. von Herrn Bitterlich-Willmann sind die Voraussetzungen des vorstehenden Satzes erfüllt. Dieser Satz geht (durch die Existenz- und Eindeutigkeitsbehauptung) über die Aussage jenes Kriteriums hinaus.

2.4. Schließlich zeigen wir noch:

Es seien $g(x)$, $h(x)$, $f(x)$ *stetig in* $[a, +\infty)$. *Ferner sei* $s(x) = g(x) + xf(x)$ *nicht-negativ oder nicht-positiv für alle hinreichend großen* x. *Schließlich seien* $g(x)$ *und* $xh(x)$ *absolut integrierbar*[6]), *aber* $s(x)$ *sei nicht integrierbar.*

Besitzt dann eine Lösung y *von* (L) *eine Asymptote, so kann diese nur die* x*-Achse sein.*

Anmerkung. Das in Nr. 1. 1. erwähnte Kriterium III. von Herrn Bitterlich-Willmann wird aus dem vorstehenden erhalten, wenn speziell $g(x) = h(x) = 0$ in $[a, +\infty)$ und $|x^2 f(x)| > Q > 0$ für alle hinreichend großen x, wobei Q eine Konstante ist.

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt, daß $r(x) = xs(x)$ nicht integrierbar ist. Mithin sind die Voraussetzungen von Nr. 2. 3. erfüllt. Angenommen, es existiere eine Lösung y von (L) mit Asymptote, also (Nr. 2. 1.) eine in $[b, +\infty)$ stetig differenzierbare, (A_1) erfüllende Lösung $\varphi(x)$ von (V). Dann muß, wie in Nr. 2. 3., Beweis, gezeigt, $C = \Phi_0 = 0$ sein; wegen $C = 0$ und Nr. 1. 2., (A_2), kann daher (V) in der Gestalt (V_{231}) (Nr. 2. 3. 1.) geschrieben werden. Da $\varphi(x)$ Lösung von (V_{231}) sein soll, welche (A_1) erfüllt, muß $xs(x)\,\Phi(x)$ integrierbar sein, wobei $\Phi(x) = \int_x^{+\infty} \varphi(\tau)\,\tau^{-2}\,d\tau$ ist; denn alle übrigen Glieder in (V_{231}) besitzen für $x \to +\infty$ einen Limes. Da andererseits $\lim_{x \to +\infty} x\,\Phi(x) = C_0$ existiert (Nr. 1. 2., (A_3)), da $s(x)$ für hinreichend große x sein Vorzeichen nicht wechselt und da $s(x)$ nach Voraussetzung nicht integrierbar ist, so muß $C_0 = 0$ sein. Die als existierend vorausgesetzte Asymptote besitzt daher (Nr. 1. 2., (A_3)) die Gleichung $Y = 0$, w. z. b. w.

(Eingegangen am 15. Januar 1942.)

Einschließungssatz für die charakteristischen Zahlen von Matrizen.

Von

L. Collatz in Karlsruhe.

1. Einleitung.

Es sei $\mathfrak{A}$ eine gegebene quadratische n-reihige Matrix mit reellen Elementen

$$\mathfrak{A} = (a_{ik}).$$

Mit $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ seien die charakteristischen Zahlen der Matrix $\mathfrak{A}$ bezeichnet, d. h. die n Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$\det |\mathfrak{A} - \varkappa \mathfrak{E}| = 0,$$

wobei $\mathfrak{E}$ die Einheitsmatrix ist.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Gültigkeit des folgenden Einschließungssatzes, der für die Berechnung der charakteristischen Zahlen wichtig ist: Ausgehend von einem beliebigen Vektor $\mathfrak{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ mit den reellen von Null verschiedenen Komponenten u_i bildet man den Vektor $\mathfrak{v} = \mathfrak{A}\mathfrak{u}$ mit den Komponenten

$$v_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} u_k. \tag{1}$$

Von den n Quotienten

$$\mu_i = \frac{v_i}{u_i} \tag{2}$$

sucht man das Minimum m und das Maximum M heraus: $m \leqq \mu_i \leqq M$. Es interessiert, unter welchen Voraussetzungen die beiden Zahlen m und M mindestens eine charakteristische Zahl $\varkappa_j$ von $\mathfrak{A}$ einschließen.

Diese Einschließungsaussage gilt nicht allgemein; bei nicht symmetrischer Matrix $\mathfrak{A}$ brauchen die charakteristischen Zahlen nicht reell zu sein; aber selbst wenn die charakteristischen Zahlen reell sind, braucht zwischen m und M keine charakteristische Zahl zu liegen, wie das folgende Beispiel zeigt: Die Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a+2 & -1 \\ 1 & a-2 \end{pmatrix}$$

hat die charakteristischen Zahlen $\varkappa_{1,2} = a \pm \sqrt{3}$. Geht man vom Vektor $\mathfrak{u} = (1, 1)$ aus, so wird $\mathfrak{v} = (a+1, a-1)$, und im Intervall von $a-1$ bis $a+1$ liegt keine der beiden charakteristischen Zahlen.

Der Einschließungssatz gilt jedoch, wenn die Matrix $\mathfrak{A}$ reell und symmetrisch ist, ferner wenn alle a_{ik} und alle u_i positiv sind. Vielleicht gelingt es, noch weitere allgemeine Fälle zu finden, bei denen der Einschließungssatz ebenfalls gültig ist. Ferner werden unter den gleichen Voraussetzungen für die Matrix $\mathfrak{A}$ Einschließungsaussagen gemacht für die Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$\det |\mathfrak{A} - \varkappa \mathfrak{D}| = 0,$$

die auch als charakteristische Zahlen der Vektorgleichung

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \varkappa \mathfrak{D}\mathfrak{x}$$

bezeichnet seien. Dabei sei $\mathfrak{D}$ eine Diagonalmatrix mit positiven Elementen[1]).

Die Gedankengänge sind teilweise ähnlich denen für die Einschließungssätze bei Differentialgleichungen und Integralgleichungen[2]).

2. Matrizen mit nichtnegativen Elementen.

Die Matrix $\mathfrak{A}$ habe jetzt positive oder nichtnegative Elemente ($a_{ik} \geqq 0$). Ist $\varkappa$ der größte Betrag der charakteristischen Zahlen von $\mathfrak{A}$, so ist nach den Sätzen von Frobenius[3]) $\varkappa$ eine charakteristische Zahl von $\mathfrak{A}$, die sogenannte Maximalwurzel von $\mathfrak{A}$. Zu dieser Zahl $\varkappa$ gibt es einen Eigenvektor $\mathfrak{x}$ (Lösung von $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \varkappa\mathfrak{x}$), dessen Komponenten x_i sämtlich nichtnegativ und nicht alle Null sind.

Mit $\mathfrak{A}$ ist auch die transponierte Matrix $\mathfrak{A}' = (a_{ki})$ eine nichtnegative Matrix; $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ haben dieselben charakteristischen Zahlen und dieselbe Maximalwurzel $\varkappa$. Es sei $\mathfrak{z}$ ein zur Maximalwurzel von $\mathfrak{A}'$ gehöriger Eigenvektor mit den Komponenten $z_i \geqq 0$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} z_k = \varkappa z_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nun wird ein Ausgangsvektor mit nur positiven Elementen $u_i > 0$ betrachtet und wie früher werden die Größen v_i, μ_i nach (1), (2) gebildet. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} (\mu_i - \varkappa)\, u_i z_i = \sum_i \sum_k (a_{ik} u_k z_i - a_{ki} z_k u_i) = 0.$$

[1]) Gleichungen der Form $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \varkappa\mathfrak{D}\mathfrak{x}$ treten verschiedentlich auf, z. B. Biezeno-Grammel, Technische Dynamik, Berlin 1939, S. 148, 252, 511, 809.

[2]) Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. **19** (1939), S. 241; Math. Zeitschr. **47** (1941), S. 395—398.

[3]) G. Frobenius, Sitzungsber. Preuß. Akad. d. Wissenschaften, Math.-phys. Klasse, Berlin 1912, 1. Halbband, S. 456—477, insbes. S. 457.

Da die $u_i z_i \geqq 0$ und nicht alle $u_i z_i = 0$ sind, könnte die Summe nicht verschwinden, wenn für alle i die Größen $\mu_i - \varkappa$ sämtlich positiv oder sämtlich negativ wären; daher ist

$$m = \operatorname*{Min}_i \mu_i \leqq \varkappa \leqq M = \operatorname*{Max}_i \mu_i,$$

und es gilt der

Satz. *Ist die Matrix $\mathfrak{A}$ positiv oder nichtnegativ, und sind $u_1, u_2, \ldots, u_n$ irgendwelche positiven Zahlen, so liegt in dem Intervall, welches von der größten und der kleinsten der n Zahlen $\frac{1}{u_i} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} u_k$ begrenzt wird, die Maximalwurzel von $\mathfrak{A}$.*

3. Reelle symmetrische Matrizen.

Für reelle symmetrische Matrizen besteht für die charakteristischen Zahlen die bekannte Minimum-Maximumeigenschaft[4]).

Die h-te charakteristische Zahl $\varkappa_h$ von $\mathfrak{A}$ ist der kleinste Wert, den das Maximum des Quotienten

$$Q = \frac{\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

annehmen kann, wenn zwischen den (reellen, nicht sämtlich verschwindenden) x_i noch $h - 1$ beliebige homogene lineare Gleichungen vorgeschrieben sind.

Für den Beweis des Einschließungssatzes ist es notwendig, die etwas erweiterte Gleichung zu betrachten

$$\mathfrak{B}\mathfrak{y} = \varrho \mathfrak{D}\mathfrak{y}; \tag{3}$$

dabei sei $\mathfrak{B}$ reell symmetrisch und $\mathfrak{D}$ eine Diagonalmatrix mit positiven Elementen d_i:

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix}.$$

Setzt man in dem Courantschen Satz $x_i = \sqrt{d_i}\, y_i$ und $a_{ik}\sqrt{d_i d_k} = b_{ik}$, so erhält man die Aussage:

---

[4]) R. Courant-D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, Bd. I, 2. Aufl. (1931), S. 27.

Die h-te charakteristische Zahl ϱ_h von (3) ist der kleinste Wert, den das Maximum des Quotienten

$$Q^* = \frac{\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik} y_i y_k}{\sum_{i=1}^{n} d_i y_i^2} \tag{4}$$

annehmen kann, wenn zwischen den y_i noch $h-1$ beliebige homogene lineare Gleichungen vorgeschrieben sind.

Nun kann man Probleme mit verschiedenen Matrizen $\mathfrak{D}$ miteinander vergleichen. Liegen die Probleme $\mathfrak{B}\mathfrak{y} = \varrho\mathfrak{D}_1\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{y} = \sigma\mathfrak{D}_2\mathfrak{y}$ vor und ist $\mathfrak{D}_1 \geqq \mathfrak{D}_2$ (jedes Element von $\mathfrak{D}_1$ sei $\geqq$ entsprechendes Element von $\mathfrak{D}_2$), so ist bei beliebigem Vektor $\mathfrak{y}$

$$|Q_1^*| \leqq |Q_2^*|,$$

wenn Q_1^* und Q_2^* die zugehörigen Quotienten (4) bedeuten. Daher folgt:

Werden bei $\mathfrak{B}\mathfrak{y} = \varrho\mathfrak{D}\mathfrak{y}$ alle d_i unter Beibehalten des Vorzeichens verkleinert (oder jedenfalls nicht vergrößert), so behält jede charakteristische Zahl ihr Vorzeichen bei und der Betrag jeder charakteristischen Zahl wird nicht kleiner.

Nun folgt der Einschließungssatz leicht. Es werden zwei Fälle unterschieden.

1. Fall. Es sind alle nach (2) gebildeten Quotienten μ_i positiv. Bei Einführung der Diagonalmatrix

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & 0 \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mu_n \end{pmatrix}$$

gilt $\mathfrak{M}\mathfrak{u} = \mathfrak{v}$ und $M\mathfrak{E} \geqq \mathfrak{M} \geqq m\mathfrak{E}$.

Der Vergleichungssatz ist also anwendbar auf die drei Gleichungen $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \varrho M\mathfrak{E}\mathfrak{x}$; $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \varrho\mathfrak{M}\mathfrak{x}$; $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \varrho m\mathfrak{E}\mathfrak{x}$, von denen die erste und die dritte die charakteristischen Zahlen $\frac{\varkappa_i}{M}$ bzw. $\frac{\varkappa_i}{m}$ haben und von denen die zweite als eine charakteristische Zahl die Zahl 1 mit dem dazugehörigen Eigenvektor $\mathfrak{u}$ hat, und zwar sei 1 die ν-te charakteristische Zahl dieser Gleichung. Nach den vorangehenden Bemerkungen über das Wandern der charakteristischen Zahlen folgt die Behauptung

$$\frac{\varkappa_\nu}{m} \geqq 1 \geqq \frac{\varkappa_\nu}{M}$$

($\varkappa_\nu$ kann dann nicht negativ sein).

2. Fall. Es sind nicht alle μ_i positiv; dann ist $m \leqq 0$. Man kann eine Zahl N so angeben, daß alle $\mu_i + N > 0$ sind. Die Matrix $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A} + N\mathfrak{E}$

hat die charakteristischen Zahlen $\varkappa_i + N$. Für die Matrix $\mathfrak{A}^*$ führt der Vektor $\mathfrak{u}$ zu einem Vektor $\mathfrak{v}^* = \mathfrak{A}^*\mathfrak{u} = \mathfrak{v} + N\mathfrak{u}$ und die zugehörigen Quotienten $\mu_i^* = \frac{v_i^*}{u_i} = \mu_i + N$ schließen, da jetzt der 1. Fall anwendbar ist, eine charakteristische Zahl $\varkappa_\nu + N$ von $\mathfrak{A}^*$ ein, also schließt das Intervall der μ_i eine charakteristische Zahl $\varkappa_\nu$ von $\mathfrak{A}$ ein.

Somit gilt der

Satz. *Ist $\mathfrak{A}$ eine symmetrische Matrix mit reellen Elementen und sind $u_1, \ldots, u_n$ von Null verschiedene reelle Zahlen, so liegt in dem Intervall, das von der größten und der kleinsten der n Zahlen $\frac{1}{u_i}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}u_k$ begrenzt wird, mindestens eine charakteristische Zahl der Matrix $\mathfrak{A}$.*

4. Einschließungssatz für die Wurzeln von $\det|\mathfrak{A} - \varkappa\mathfrak{D}| = 0$.

Ist $\mathfrak{D}$ wie in Nr. 3 eine Diagonalmatrix mit positiven Elementen d_i, so kann man die Aussagen von Nr. 2 und 3 durch Einführung der Größen

$$a_{ik}^* = \frac{a_{ik}}{\sqrt{d_i d_k}}, \quad x_i^* = x_i\sqrt{d_i}, \quad u_i^* = u_i\sqrt{d_i}, \quad v_i^* = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^* u_k^*,$$

$$\mathfrak{A}^* = (a_{ik}^*), \qquad \mathfrak{x}^* = (x_i^*), \qquad \mathfrak{u}^* = (u_i^*), \qquad \mathfrak{v}^* = (v_i^*)$$

auf die erweiterte Gleichung $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \varkappa\mathfrak{D}\mathfrak{x}$ übertragen, die bei Einführung der mit Stern versehenen Größen in $\mathfrak{A}^*\mathfrak{x}^* = \varkappa\mathfrak{x}^*$ übergeht.

Ist $\mathfrak{A}$ symmetrisch, so ist es auch $\mathfrak{A}^*$; hat $\mathfrak{A}$ nur nichtnegative Elemente, so auch $\mathfrak{A}^*$, mit u_i sind auch die u_i^* positiv. Unter den Voraussetzungen der Nr. 2 und 3 schließen daher die Zahlen

$$\mu_i^* = \frac{v_i^*}{u_i^*} = \frac{v_i}{d_i u_i}$$

mindestens eine charakteristische Zahl von $\mathfrak{A}^*$, d. h. eine charakteristische Zahl von $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \varkappa\mathfrak{D}\mathfrak{x}$ ein. Es gilt also der

Satz. *Erfüllen die von Null verschiedenen reellen Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ und die reelle Matrix $\mathfrak{A}$ eine der beiden Voraussetzungen*

$$\text{a)}\ u_i > 0; \quad a_{ik} \geqq 0,$$

$$\text{b)}\ a_{ik} = a_{ki},$$

ist ferner $\mathfrak{D}$ eine Diagonalmatrix mit positiven Elementen d_i, so liegt in dem Intervall, das von der größten und der kleinsten der n Zahlen $\frac{1}{d_i u_i}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}u_k$ begrenzt wird, mindestens eine charakteristische Zahl der Gleichung $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \varkappa\mathfrak{D}\mathfrak{x}$.

5. Zahlenbeispiel.

Vorgelegt sei die symmetrische Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Durch einfaches Probieren und Variieren der Komponenten u_i (Überlegung, ob Vergrößerung oder Verkleinerung einer bestimmten Komponente die Grenzen $\min_i \mu_i$ und $\max_i \mu_i$ zusammenrücken läßt) kann man sehr schnell die charakteristischen Zahlen in grobe Schranken einschließen.

So erhält man z. B.

aus $\mathfrak{u} = (1, 1, -1, -2)$	die Schranken	$1 \leqq \varkappa_3 \leqq 2$
„ $\mathfrak{u} = (3, 4, 5, 1)$	„ „	$3{,}5 \leqq \varkappa_2 \leqq 4$
„ $\mathfrak{u} = (3, 1, -3, 3)$	„ „	$5 \leqq \varkappa_1 \leqq 6$
„ $\mathfrak{u} = (-4, 4, -1, 1)$	„ „	$-4 \leqq \varkappa_4 \leqq -2{,}75.$

Damit hat man alle 4 charakteristischen Zahlen in Intervalle eingegrenzt, die sich gegenseitig nicht überschneiden. Engere Intervalle erhält man, indem man feststellt, wo Änderung einer Komponente etwa um 0,1 das Maximum der μ_i herabdrückt usw. So erhält man z. B. für die an letzter Stelle genannte charakteristische Zahl den besseren Vektor:

$$\begin{aligned} \mathfrak{u} &= (-3{,}5; \quad 3{,}8; \quad -0{,}9; \quad 1) \\ \mathfrak{v} = \mathfrak{A}\mathfrak{u} &= (10{,}8; \quad -11{,}4; \quad 2{,}7; \quad -3{,}1) \\ \text{Quotienten} &= (-3{,}08; \quad -3; \quad -3; \quad -3{,}1), \end{aligned}$$

man weiß jetzt also $-3{,}1 \leqq \varkappa_4 \leqq -3$.

(Eingegangen am 11. November 1941.)

Über Eikörper mit Vieleckschatten.

Von

G. Bol in Freiburg i. Br.

Auf Fragen der hier behandelten Art weist zuerst C. Godbersen hin, der in seiner Göttinger Dissertation[1]) die Vermutung aufstellt, daß ein Eikörper, der sich in jeder Richtung und auf jede Ebene als Dreieck projiziert, selbst ein Dreieck ist. W. Süss und H. Kneser[2]) haben dann gezeigt, daß die Vermutung zutrifft, und daß entsprechendes auch für Eikörper mit lauter Viereckprojektionen gilt:

Viereckssatz. Ein Eikörper, der sich in jeder Richtung und auf jede Ebene als Vieleck mit höchstens vier Seiten projiziert, ist ein räumliches Viereck.

„Räumliches Viereck" heißt dabei jede konvexe Hülle von vier Punkten im Raum, dazu gehört also das Tetraeder, das ebene Viereck, aber auch das Dreieck und die Strecke.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist eine Verallgemeinerung dieser Ergebnisse. Die wichtigsten Sätze, die dabei bewiesen werden, sind die folgenden:

Hauptsatz. *Ein Eikörper, der sich in jeder Richtung und auf jede Ebene als Vieleck projiziert, ist ein Polyeder.*

Zusatz. *Hat jede Projektion höchstens N Ecken ($N \geqq 5$), und hat das Polyeder innere Punkte*[2a]), *so hat jede Seitenfläche des Polyeders höchstens $2N - 6$ Ecken.*

Fünfecksatz. *Hat keine Projektion mehr als 5 Ecken, so ist das Polyeder des Hauptsatzes ein räumliches Fünfeck oder ein räumliches Sechseck.*

Unter „räumliches n-Eck" wird dabei wieder die konvexe Hülle von n Punkten im Raum verstanden. Zu bemerken ist, daß natürlich jedes räumliche Fünfeck den Bedingungen des Fünfecksatzes genügt, aber nicht jedes räumliche Sechseck:

---

[1]) Der Satz vom Vektorbereich in Räumen beliebiger Dimension. Göttingen 1938. S. 34.

[2]) Aufgabe 298, Jahresberichte der Deutschen Math. Ver. 51 (1941), S. 3. Die Beweise wurden noch nicht veröffentlicht.

[2a]) Der Nebensatz dient nur, um für $N = 5$ das ebene Fünfeck auszuschließen.

Ein räumliches Sechseck mit lauter Fünfeckprojektionen[3]*, das kein Fünfeck ist, ist entweder ein dreiseitiger Pyramidenstumpf (mit parallelen Schnittebenen) oder konvexe Hülle eines Parallelogramms und einer Strecke.*

Für die gegenseitige Lage von Strecke und Parallelogramm gelten hier noch gewisse Zusatzbedingungen, die später erwähnt werden sollen (vgl. **15.** und **16.**).

Aus der letzten schärferen Formulierung des Fünfecksatzes ergibt sich sofort ein entsprechender Satz aus der projektiven Geometrie:

Projektiver Fünfecksatz. *Ein Eikörper, der bei Zentralprojektion aus einem beliebigen Zentrum außerhalb auf eine beliebige Ebene als Projektion stets ein Fünfeck hat, ist selbst ein räumliches Fünfeck.*

Unter den räumlichen Sechsecken, die als Parallelprojektionen lauter Fünfecke besitzen, gibt es nämlich offenbar keine projektiv invariante Klasse, die Körper mit mehr als fünf Ecken enthält.

Im übrigen läßt sich der projektive Fünfecksatz auch einfacher beweisen: man kann annehmen, daß der Körper keine zwei parallelen Kanten besitzt und braucht dann aus § 2 im wesentlichen nur die Schlüsse aus Nr. **7** zu verwenden.

Auch eine Verschärfung ist möglich: Ein Körper, der sich aus den Punkten von drei Ebenen, welche ihn nicht treffen und welche keine Gerade gemeinsam haben, stets als Fünfeck projiziert, ist ein räumliches Fünfeck.

Erweiterung des Viereckssatzes zum $n+1$-Eck-Satz des n-dimensionalen Raumes ist leicht, ebenso läßt sich der Hauptsatz erweitern. Erweiterung des Fünfecksatzes zum $n+2$-Eck-Satz des R_n dürfte aber nur sehr umständlich möglich sein.

Für $N = 6$ kann die Eckenzahl des Polyeders im Zusatz vermutlich 8 nicht übersteigen, der Beweis dürfte aber ebenfalls nicht leicht sein.

Bemerkenswert ist, daß im Hauptsatz nicht verlangt zu werden braucht, daß die Seitenzahl der Projektionen beschränkt sein soll; wenn alle Projektionen Vielecke sind, so ist deren Seitenzahl auf Grund eben des Hauptsatzes von selbst beschränkt.

§ 1.

Beweis des Hauptsatzes.

1. Jede Stützebene eines konvexen Körpers hat mit diesem stets einen ebenen konvexen Bereich, also einen Punkt, eine Strecke oder einen Eibereich mit inneren Punkten gemeinsam. Wie sich herausstellen wird, ist im hier betrachteten Fall, also für Eikörper mit lauter Vieleckprojektionen, dieser Eibereich, falls er innere Punkte hat, stets ebenfalls ein Vieleck. Aus diesem

[3]) Natürlich dürfen die Projektionen auch weniger als fünf Ecken haben, entsprechendes gilt für alle weiteren Sätze. Ein Vieleck mit genau n Ecken wollen wir deshalb auch ein „Echtes n-Eck" nennen.

Grunde soll zunächst eine solche „Seitenebene" des Körpers — also eine Stützebene, mit der der Körper ein echtes Vieleck gemeinsam hat — genauer betrachtet werden.

Wir bedienen uns dabei topologischer Schlüsse, indem wir die zu einer vorgegebenen „benachbarten" Stützebenen heranziehen. Diese „Nachbarschaft" ist stets im sphärischen Normalenbild zu verstehen, wird also eine Behauptung ausgesprochen für alle zu einer vorgegebenen Stützebene E genügend benachbarten Stützebenen, so ist diese richtig für alle Stützebenen, deren Normalenbilder in eine Umgebung des Normalenbildes E^* von E fallen.

In diesem Sinne behaupten wir:

Satz 1. *Hat die Stützebene E mit dem Körper ein Vieleck gemeinsam, so haben alle genügend benachbarten Stützebenen mit dem Körper entweder nur eine Ecke oder nur eine Kante des Vielecks gemeinsam.*

Zum Beweis projizieren wir den Körper in der Richtung einer Vieleckkante. Offenbar liefert dann die Kante eine Ecke des Projektionsvielecks, unser Körper liegt also in einem räumlichen Winkel, der von der Vieleckebene E und einer weiteren durch die Kante gehenden Ebene gebildet wird. Da dasselbe für alle anderen Kanten des Vielecks gilt, so liegt unser Körper in einer „Wanne", wie sie in der Fig. 1 gezeichnet ist.

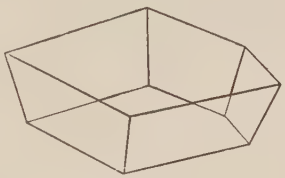

Fig. 1.

Wir betrachten nun die aufsteigenden Kanten der Wanne, die von den Ecken des Vielecks ausgehen. Das Minimum der Winkel, die sie mit der Vieleckebene einschließen, sei α. Dann hat jede Stützebene, welche mit E einen kleineren Winkel als α einschließt, mit der Wanne, also auch mit dem Körper nur Randpunkte des Vielecks gemeinsam. Denn ein Halbstrahl, der von einem Randpunkt des Vielecks ausgeht und innerhalb der Wanne verläuft, schließt mit E einen größeren Winkel als α ein und kann also nicht in einer der genannten Stützebenen liegen. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Satz 2. *Hat eine Stützebene mit dem Körper eine Strecke gemeinsam, so haben alle genügend benachbarten Stützebenen mit dem Körper entweder nur diese Strecke oder nur einen ihrer Endpunkte gemeinsam.*

Zum Beweis braucht man nur die Strecke als entartetes Rechteck aufzufassen und Satz 1 anzuwenden.

Faßt man den Punkt als entartetes Quadrat auf, so folgt ebenso:

Satz 3. *Hat eine Stützebene mit dem Körper nur einen Punkt P gemeinsam, so enthalten alle genügend benachbarten Stützebenen ebenfalls nur den Punkt P des Körpers.*

Anders ausgedrückt:

Satz 4. *Die Normalenbilder derjenigen Stützebenen, die mit dem Körper genau den festen Punkt P gemeinsam haben, bilden auf der Kugel eine offene Menge.*

Aus Satz 2 und Satz 3 folgt weiter:

Satz 5. *Die Normalenbilder derjenigen Stützebenen, die mit dem Körper entweder nur einen Punkt oder nur eine Strecke gemeinsam haben, bilden auf der Kugel eine offene Menge.*

2. Satz 6. *Jede Stützebene hat mit unserem Körper entweder einen Punkt oder eine Strecke oder ein Vieleck gemeinsam.*

Zum Beweis möge die Stützebene E mit dem Körper einen Eibereich B mit inneren Punkten gemeinsam haben. Wir wollen beweisen, daß B ein Vieleck ist. Betrachten wir also eine Stützgerade g von B; diese hat mit B entweder einen Punkt P oder eine Strecke P_1P_2 gemeinsam. Projizieren wir unseren Körper in der Richtung von g, so liefert g eine Ecke des Projektionsvielecks, folglich kann man eine Stützebene unseres Körpers angeben, die mit diesem ebenfalls nur P bzw. nur die Strecke P_1P_2 gemeinsam hat.

Im ersten Falle folgt aus Satz 3, daß alle benachbarten Stützgeraden mit B ebenfalls nur P gemeinsam haben. Denn die benachbarten Stützebenen des Körpers schneiden in E zu g benachbarte Geraden aus, die vom Körper, also von B nur den Punkt P enthalten und deshalb Stützgeraden von B sind. Im zweiten Falle folgt aus Satz 2, daß alle benachbarten Stützgeraden mit B nur den Punkt P_1 oder den Punkt P_2 gemeinsam haben (nur g selbst enthält die ganze Strecke P_1P_2).

Diese beiden Aussagen lassen sich auch anders formulieren. Betrachten wir nämlich die Normalenbilder der Stützgeraden an einen Kreis in E, so lautet die erste:

Die Normalenbilder derjenigen Stützgeraden von B, die mit B nur einen Punkt gemeinsam haben, bilden eine offene Menge M auf dem Bildkreis.

Die zweite lautet:

Die Normalenbilder derjenigen Stützgeraden von B, die mit B eine Strecke gemeinsam haben, liegen auf dem Bildkreis sämtlich isoliert.

Zu jedem solchen Normalenbild gibt es also eine Umgebung auf dem Bildkreis, zu der lauter Stützgeraden gehören, die mit B nur einen Punkt gemeinsam haben.

Aus der ersten Aussage folgt aber, daß die Menge aller Normalenbilder von Stützgeraden, die mit B mehr als einen Punkt gemeinsam haben — als Restmenge einer offenen Menge — abgeschlossen ist. Nun enthält aber eine

abgeschlossene Menge auf dem Kreise, deren Punkte sämtlich isoliert liegen, nur endlich viele Punkte.

Es gibt also nur endlich viele Stützgeraden, die mit B eine Strecke gemeinsam haben. Zeigen wir nun noch, daß durch jeden Randpunkt Q von B mindestens eine solche Stützgerade geht, so folgt, daß B mit dem von unseren endlich vielen Stützgeraden gebildeten Vieleck identisch ist. Damit ist dann unsere Behauptung bewiesen.

Die letzte Aussage ist aber leicht zu beweisen. Denn die Normalenbilder aller Stützgeraden, die nur Q mit B gemeinsam haben, bilden, wie wir oben sahen, eine offene Menge M[3a]) auf dem Bildkreis, die natürlich nicht den ganzen Kreis ausfüllt, also Randpunkte hat, die nicht zu ihr gehören.

Zu einem solchen Randpunkt aber gehört eine Stützgerade, die — als Grenzlage von Stützgeraden durch Q — noch durch Q geht, aber weil sie nicht zu M gehört, nicht nur Q mit B gemeinsam hat, also B längs einer Strecke berührt. Damit ist alles bewiesen.

3. Auf Grund von Satz 6 läßt sich nun der Hauptsatz leicht beweisen. Nach Satz 5 bilden nämlich die Normalenbilder derjenigen Stützebenen unseres Körpers, die mit diesem einen Eibereich mit inneren Punkten, also ein Vieleck gemeinsam haben — als Restmenge einer offenen Menge — eine abgeschlossene Menge, nach Satz 1 enthält diese nur isolierte Punkte, ist also endlich.

Unser Körper hat also nur endlich viele Seitenebenen.

Beweisen wir noch, daß jeder Randpunkt P unseres Körpers in mindestens einer Seitenebene liegt, so ist unser Körper mit dem von den Seitenebenen gebildeten Polyeder identisch. Das aber ist einfach.

Nach Satz 3 bilden nämlich die Normalenbilder der Stützebenen, die nur in P berühren, eine offene Menge[3b]), die natürlich nicht die ganze Kugel umfaßt. Zu einem Randpunkt dieser Menge M gehört eine Stützebene, die noch durch P geht, aber — weil der Randpunkt nicht zu M gehört — nicht nur in P berührt, also mit dem Körper mindestens eine Strecke PQ gemeinsam hat. Projiziert man den Körper in der Richtung dieser Strecke, so liefert sie einen Randpunkt R des Projektionsvielecks. RS sei eine durch R gehende Seite des Projektionsvielecks, T sei ein Urbild von S. Die Ebene durch RS in der Projektionsrichtung ist jetzt Stützebene und hat mit dem Körper die drei

---

3a) Oder es gibt keine solche Stützgerade. Dann hat man aber von vornherein eine Stützgerade die längs einer Strecke berührt, denn es gibt ja mindestens eine Stützgerade durch Q.

3b) Oder die Menge ist leer. Dann findet man aber in einer beliebig gewählten Stützebene durch P schon eine Strecke PQ des Körpers und schließt mit dieser weiter wie unten.

Punkte P, Q, T gemeinsam, die nicht in einer Geraden liegen. Sie ist also die gesuchte Seitenebene durch P.

Damit ist der Hauptsatz vollständig bewiesen.

4. Beweis des Zusatzes: Ein Polyeder mit inneren Punkten, das sich bei jeder Projektionsrichtung als Vieleck mit höchstens N Ecken projiziert ($N \geqq 5$), hat keine Seitenebene mit mehr als $2N - 6$ Kanten.

In der Fig. 2 sei eine Fazette (Seitenebene) F des Polyeders gezeichnet. Hat das Polyeder nur noch eine weitere Ecke S, ist es also eine Pyramide mit F als Basis und S als Spitze, so kann man die Seitenebene E als Projektionsebene wählen, die Projektion ist dann die konvexe Hülle von F und der Projektion S^* von S. Wählt man die Projektionsrichtung so, daß S^* außerhalb von F und in der Nähe einer Kantenmitte fällt, so hat die Projektion eine Ecke mehr als F, die Eckenzahl von F darf also höchstens $N - 1$ sein. Für $N \geqq 5$ ist aber $2N - 6 \geqq N - 1$, in diesem Falle stimmt also die Behauptung.

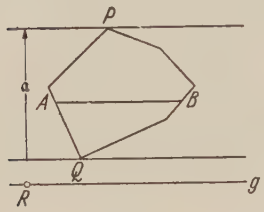

Fig. 2.

Nehmen wir also an, das Polyeder hat außer den Fazettenecken noch mindestens zwei weitere Eckpunkte. S sei ein solcher Eckpunkt, ST eine Kante, die von S ausgeht und nicht nach einer Fazettenecke hinführt, da unser Körper keine Pyramide mit S als Spitze sein soll, gibt es sicher eine solche Kante. R sei der Schnittpunkt der verlängerten Kante ST mit der Seitenebene E, R liegt außerhalb von F und kann natürlich im Unendlichen fallen.

Eine Stützebene unseres Polyeders, die nur die Kante ST mit diesem gemeinsam hat, schneidet E in einer Geraden g durch R, die F nicht trifft. Die Stützebene kann so gewählt werden, daß g zu keiner Seite von F parallel wird. Projiziert man jetzt unser Polyeder in der Richtung g, so liefern S und T zwei Ecken der Projektion. Dasselbe gilt für jede zu g genügend benachbarte Projektionsrichtung.

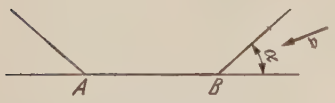

Fig. 3.

Die zu g parallelen Stützgeraden an F mögen F in P und Q berühren (Fig. 2). P und Q teilen den Umriß von F in zwei Streckenzüge. Hätte nun das Vieleck F mehr als $2N - 6$ Seiten, so würde mindestens einer dieser Züge aus $N - 2$ oder mehr Seiten bestehen. Es sei dies etwa der Zug PBQ der Figur.

$\mathfrak{a}$ sei ein Vektor der Ebene E senkrecht zu g. Wir schneiden unser Polyeder mit den Ebenen senkrecht zu $\mathfrak{a}$, AB sei die Spur einer solchen Ebene, die Fig. 3 möge den Durchschnitt der Ebene mit unserem Polyeder darstellen. Dieser

ist ein Vieleck, das B als Ecke hat. α sei der Außenwinkel bei B. α bleibt fest, solange B auf derselben Strecke des Streckenzuges liegt, nimmt also nur endlich viele Werte an, α_0 sei der kleinste dieser Werte.

Wählen wir jetzt einen Projektionsvektor $\mathfrak{v}$, der senkrecht auf $\mathfrak{a}$ steht und mit E einen Winkel β einschließt, der kleiner ist als α_0 (vgl. Fig. 3), und unsere Seitenebene als Projektionsebene, so ist der Streckenzug PBQ ein Teil des Projektionsumrisses. Da dieser Streckenzug mindestens $N-1$ Ecken hat, und außerdem bei genügend kleinem β auch S und T Ecken der Projektion liefern, hätte die Projektion mindestens $N+1$ Ecken, im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit ist der Satz bewiesen[4]).

§ 2.

Beweis des Fünfecksatzes.

5. Einige allgemeine Betrachtungen über Körper mit lauter N-Eckprojektionen seien vorausgeschickt.

Sei das N-Eck $P_1P_2\ldots P_N$ Projektion eines solchen Körpers. Dann sind die Urbilder $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$ der Ecken eindeutig bestimmt.

Beweis. Wäre etwa das Urbild von P_1 nicht eindeutig bestimmt, also eine Strecke Q_1R_1 in der Projektionsrichtung, so könnten wir durch Q_1R_1 eine Ebene E legen, die sonst keine Punkte mit unserem Körper gemeinsam hat. Sei nun $\mathfrak{v}$ ein Vektor in E in der Projektionsrichtung, $\mathfrak{w}$ ein Vektor in E senkrecht zu $\mathfrak{v}$, so betrachten wir die Projektion unseres Körpers in der Richtung des Vektors $\mathfrak{v}+\delta\mathfrak{w}$ bei genügend kleinem δ. Die Projektionsebene lassen wir ungeändert.

Da die Projektion eines konvexen Körpers bei festgehaltener Projektionsebene stetig von der Projektionsrichtung abhängt — das folgt daraus, daß die Stützfunktion eines konvexen Körpers eine stetige Funktion auf der Einheitskugel ist —, hat die neue Projektion je eine Ecke in der Nähe von P_2, P_3, $\ldots$, P_N, und zwar beliebig nahe zu diesen Punkten, wenn nur δ klein genug ist.

Die Projektion der Kante Q_1R_1 aber fällt längs der Spur der Ebene E in der Projektionsebene, diese trägt also ebenfalls zwei Ecken der Projektion. Unsere Projektion müßte also wenigstens $N+1$ Ecken haben, im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit ist die Behauptung bewiesen.

---

[4]) Für $N=4$ bleiben alle Schlüsse richtig, nur die Ungleichung $2N-6 \geqq N-1$ gilt nicht mehr. Daraus ergibt sich sofort ein Beweis des Viereckssatzes. Der zweite Fall ist nämlich hier unmöglich, weil unsere Seitenebene nur $2N-6=2$ Kanten haben könnte. Der Körper ist also eine Pyramide, dann aber hat die Basisfläche höchstens $N-1=3$ Ecken und es handelt sich um ein Tetraeder. Übrigens läßt sich der Viereckssatz durchsichtiger ohne den Umweg über den Hauptsatz beweisen. Ich hoffe darauf noch zurückzukommen.

Nach dem Hauptsatz ist unser Körper ein Polyeder. Ist nun aber bei einer bestimmten Projektionsrichtung eines Polyeders die Ecke Q Urbild einer Ecke der Projektion, so gilt dasselbe für alle genügend benachbarten Projektionsrichtungen. Also:

Ist die Projektion unseres Körpers bei einer bestimmten Projektionsrichtung ein echtes N-Eck, so gilt dasselbe für alle zur vorgegebenen genügend benachbarten Projektionsrichtungen und die Urbilder der Ecken sind dabei dieselben.

Stellen wir jetzt jede Projektionsrichtung durch ihr Bild auf einer Richtungskugel dar — jeder Richtung entsprechen dabei zwei Gegenpunkte der Kugel —, so kann man diesen Sachverhalt auch so ausdrücken:

Denjenigen Projektionsrichtungen, bei denen die Projektion ein echtes N-Eck ist und die Urbilder der Ecken N vorgegebene Punkte $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$ sind, entspricht auf der Richtungskugel eine offene Punktmenge.

Sei A ein Randpunkt dieser offenen Menge M. Dann kann zur entsprechenden Richtung kein echtes N-Eck als Projektion gehören. Denn entweder wären $Q_1, Q_2, \ldots Q_N$ die Urbilder der Ecken, dann würde A Punkt von M und deshalb innerer Punkt von M sein, oder die Urbilder wären ganz oder zum Teil andere, dann müßte A zu einer zu M fremden offenen Menge gehören und könnte ebenso wenig Randpunkt von M sein.

Da das für beliebig benachbarte Projektionsrichtungen der Fall ist, ist bei der zu A gehörigen Richtung immer noch das Projektionspolygon die konvexe Hülle der Projektionen von $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$ und liegen diese auf dem Rand des Polygons, da dieses aber höchstens $N-1$ Seiten hat, liegen auf wenigstens einer Seite drei dieser Projektionen. Das bedeutet aber, daß die zugehörigen Urbilder in einer Seitenebene des Polyeders liegen und daß die zu A gehörige Projektionsrichtung zu dieser Seitenebene parallel ist.

Anschaulich läßt sich das so ausdrücken: *Ist die Projektion unseres Körpers bei einer bestimmten Projektionsrichtung ein echtes N-Eck, und ändert man die Richtung stetig, so kann die Eckenzahl der Projektion und können die Urbilder der Ecken sich nur dann ändern, wenn die Projektionsrichtung zu einer der von je drei der Punkten Q_i bestimmten Ebenen parallel wird, die gleichzeitig Seitenebene unseres Körpers ist.*

Im übrigen kann man das auch direkt einsehen: Falls ein Punkt Q_i als Ecke der Projektion verschwinden soll, so muß der hindurchgehende Projektionsstrahl in den Körper hineinwandern, das kann aber nur durch eine Seitenebene hindurch geschehen.

6. Wir wollen jetzt noch untersuchen, was geschieht, wenn die Projektionsrichtung zu einer Kante unseres Körpers parallel wird.

Sei das $(N-1)$-Eck $P_1, P_2, \ldots, P_{N-1}$ Projektion unseres Körpers, dabei seien die Urbilder $Q_2, Q_3, \ldots, Q_{N-1}$ von $P_2, P_3, \ldots, P_{N-1}$ eindeutig bestimmt, P_1 aber sei Projektion einer Kante Q_1R_1 unseres Körpers. Für alle genügend benachbarten Projektionsrichtungen sind dann $Q_2, Q_3, \ldots, Q_{N-1}$ immer noch Urbilder von Ecken der Projektion.

Legt man aber durch Q_1R_1 eine Ebene E hindurch, die den Körper sonst nicht trifft, deren Spur S also nur P_1 mit der Projektion gemeinsam hat, und untersucht benachbarte Projektionsrichtungen, die in dieser Ebene liegen, so fällt hierbei stets die Projektion der Kante Q_1R_1 längs S, und die Bilder von Q_1 und R_1 werden Ecken der Projektion.

Für alle zur Kante benachbarten Projektionsrichtungen in der Ebene E ist also die Projektion ein N-Eck und sind die Urbilder der Ecken dieselben. Also:

Ist die Projektion unseres Körpers in der Richtung einer Kante ein $N-1$-Eck und sind die Urbilder der nicht zur Kante gehörigen Ecken eindeutig bestimmt, ist weiter E eine Ebene durch die Kante, die den Körper sonst nicht trifft, so ändern sich die Urbilder der Ecken nicht, wenn die Projektionsrichtung, in der Ebene gelegen, die Kante durchschreitet.

Dieses Ergebnis soll später verwendet werden.

7. Wir wenden uns jetzt dem Fünfecksatz zu, von jetzt an soll unser Körper also nur Fünfeckprojektionen haben. Wenn wir den trivialen Fall ausschließen, daß unser Körper ein ebenes Fünfeck ist, so können nach dem Zusatz zum Hauptsatz Seitenebenen mit mehr als vier Ecken nicht vorkommen. Wir unterscheiden deshalb drei Fälle:

A. Der Körper wird ausschließlich von Dreiecken begrenzt.

B. Alle Begrenzungsvielecke sind entweder Parallelogramme oder Dreiecke.

C. Es gibt ein Begrenzungsviereck, das kein Parallelogramm ist, aber keine Begrenzungspolygone mit mehr als vier Ecken.

Bevor wir die Fälle aber einzeln untersuchen, fügen wir noch einige Bemerkungen zu, die für alle gelten.

Unser Körper möge sich in der Richtung $\mathfrak{v}$ als Viereck $P_1P_2P_3P_4$ projizieren.

Sind P_1 und P_3 Gegenecken des Projektionsvierecks, so können sie nicht gleichzeitig Projektion je einer Kante des Körpers sein. Denn man könnte durch beide Kanten Ebenen parallel zur Diagonale P_2P_4 der Projektion legen, die den Körper sonst nicht treffen; ändert man die Projektionsrichtung innerhalb dieser Ebenenrichtung, so gelten für beide Kanten die Betrachtungen aus **6.** und die Projektion würde ein Sechseck werden, was nicht sein kann.

Sind zwei aufeinanderfolgende Ecken der Projektion, etwa P_1 und P_2, Projektion je einer Kante, so hat die Fazette des Körpers, deren Projektion P_1P_2 ist, zwei parallele Seiten, und also mindestens vier Ecken.

In Fall A kann also höchstens eine Ecke eines Projektionsvierecks Projektion einer Kante sein. Daher können wir im Falle A auf Viereckprojektionen in der Richtung einer Kante stets **6.** anwenden.

8. Als weitere Vorbereitung untersuchen wir, welche Gestalten ein räumliches Fünfeck, also die konvexe Hülle von fünf Punkten A, B, C, D, E im Raum, haben kann.

Ein nicht ebenes räumliches Fünfeck kann stets aufgebaut werden aus zwei Tetraedern, die eine Seitenfläche gemeinsam haben.

Die Verbindungsstrecke der vierten Ecken muß dabei natürlich das gemeinsame Dreieck treffen.

Beweis. Liegen vier der Punkte in einer Ebene, ist der Körper also eine vierseitige Pyramide, so zerschneidet eine Ebene durch die Spitze und eine Diagonale des Vierecks ihn in zwei Tetraeder der verlangten Art.

Im anderen Falle betrachten wir die Verbindungen eines der Punkte, etwa von A, mit den anderen. Liegt eine dieser Verbindungen, etwa AE, im Innern der von den drei anderen AB, AC, AD gebildeten körperlichen Ecke, so kann man den Körper aus den beiden Tetraedern $ABCD$ und $EBCD$ aufbauen.

Liegen die vier Kanten sämtlich auf der Körperbegrenzung, so mögen sie beim Umlauf um A auf der Körperoberfläche etwa in der Reihenfolge AB, AC, AD, AE getroffen werden. Die Ebene ABD teilt dann den Körper in zwei Teile, ebenso ACE; ihre Schnittgerade, das ist die gemeinsame Treffgerade von BD und CE durch A, verläuft von A aus im Körperinnern. Sie möge BD in F und CE in G treffen. Fallen F und G zusammen, so liegen B, C, D, E in einer Ebene, dieser Fall wurde schon betrachtet. Trifft man, von A ausgehend, zuerst auf F, so ist F innerer Punkt, man kann dann B und D als Tetraederspitzen, ACE als gemeinsame Basisfläche wählen. Trifft man zuerst auf G, so läßt sich der Körper entsprechend in die beiden Tetraeder $CABD$ und $EABD$ aufteilen. Damit ist alles bewiesen.

9. Wenden wir uns jetzt dem Fall A zu. $A_1B_1C_1D_1E_1$ sei eine Fünfeckprojektion unseres Körpers, A, B, C, D, E seien die Urbilder der Projektionsecken. Liegen diese fünf Punkte in einer Ebene, bilden sie also ein ebenes Fünfeck, so wenden wir **5.** an, danach muß die Ebene durch drei der Punkte, also die Fünfeckebene, Seitenebene sein, unser Körper würde dann von einem Fünfeck begrenzt werden, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Das von unseren Punkten bestimmte räumliche Fünfeck ist also nicht eben. Wir können also **8.** anwenden, die Spitzen der beiden Tetraeder mögen etwa D und E sein, ABC das gemeinsame Basisdreieck.

Unsere Fragestellung ist affininvariant, wir wollen deshalb so affin transformieren, daß DE senkrecht zur Ebene ABC wird[5]).

Wir untersuchen nun, für welche Projektionsrichtungen unser räumliches Fünfeck eine Fünfeckprojektion hat. Für Projektionsrichtungen parallel zur Ebene ABC ist das sicher nicht der Fall, wir können also stets diese Ebene, die wir uns waagerecht denken, als Projektionsebene wählen. Die Projektion unseres Körpers ist dann die konvexe Hülle von A, B, C und den Projektionen D^* und E^* von D und E.

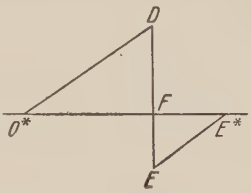

Fig. 4.

Der Schnittpunkt F von DE und ABC liegt innerhalb oder auf dem Rande dieses Dreiecks, da die beiden Projektionsstrahlen DD^* und EE^* in einer Ebene durch DE liegen, geht D^*E^* durch F und trifft also das Dreieck ABC. Damit die Projektion ein echtes Fünfeck wird, genügt es also, wenn D^* und E^* mit A, B, C je ein echtes Viereck bilden.

Damit dies für D^* der Fall ist, muß dieser Punkt offenbar liegen außerhalb des waagerecht schraffierten Teiles unserer Ebene (Fig. 5). Dasselbe muß für E^* der Fall sein; da aber D^* und E^* nach Fig. 4 durch eine Homothetie mit Ähnlichkeitszentrum F verknüpft sind, kommt das darauf hinaus, daß D^* eine entsprechende Lage haben muß in bezug auf ein zu ABC nach dem Zentrum F homothetisches Dreieck $A'B'C'$. Dabei ist EA' parallel zu DA, EB' parallel zu DB und EC' parallel zu DC.

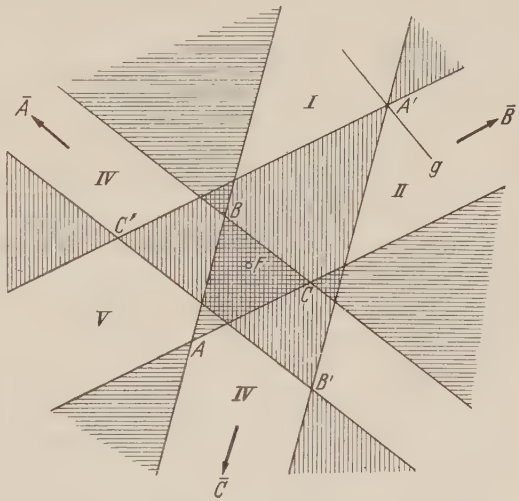

Fig. 5.

Notwendig und hinreichend, damit die Projektion des räumlichen Fünfecks $ABCDE$ ein echtes Fünfeck wird, ist, daß D^* außerhalb des waagerecht schraffierten und außerhalb des senkrecht schraffierten Teiles der Ebene, also innerhalb eines der Teile liegt, die in der Fig. 5 weiß verblieben sind.

Natürlich brauchen die beiden Dreiecke nicht gerade die in der Figur gezeichnete gegenseitige Lage zu haben, es kann $A'B'C'$ auch ganz innerhalb ABC liegen, oder auch dieses Dreieck ganz umfassen, wesentlich ist nur, daß

[5]) An sich wäre das nicht nötig, die Figuren werden dadurch aber übersichtlicher.

das Ähnlichkeitszentrum der beiden Dreiecke innerhalb oder auf dem Rande jedes Dreiecks liegt.

Offenbar bestimmt D^* eindeutig die Projektionsrichtung, und umgekehrt. Statt eine Richtungskugel heranzuziehen, können wir also auch jede Projektionsrichtung durch den zugehörigen Punkt D^* darstellen.

10. Bis jetzt haben wir nur die Projektionen unseres Fünfecks betrachtet, jetzt kehren wir zu den Projektionen unseres Körpers zurück. Wir wissen dann zunächst nur, daß es eine Projektionsrichtung gibt, für die die Projektion des Körpers ein echtes Fünfeck ist und mit derjenigen unseres räumlichen Fünfecks übereinstimmt. Der zugehörige Punkt D^* liegt in einem der nicht schraffierten Teile der Figur, in welchem ist unbekannt. Nehmen wir etwa an, er möge in dem mit I bezeichneten Teil liegen.

Dann folgt zunächst aus **5.**, daß die Projektion des Körpers für *alle* Punkte des Bereiches I mit der Projektion des Fünfecks übereinstimmt. Denn die Eckenzahl der Projektion des Körpers, sowie die Urbilder der Ecken können sich nur ändern, wenn die Projektionsrichtung in eine der von je drei der Urbilder bestimmten Ebenen fällt, das ist aber nur der Fall, wenn D^* auf eine der sechs Geraden der Figur liegt.

Aber auch für Projektionsrichtungen, für die D^* in II liegt, fällt die Körperprojektion mit der Projektion des Fünfecks zusammen. Sei nämlich g eine Strecke durch den gemeinsamen Punkt A' der Ränder von I und II, die sonst ganz im Innern dieser beiden Bereiche verläuft. Bewegt sich D^* auf dieser Strecke, so ändern sich die Projektionen von Körper und Fünfeck stetig; da sie für alle Lagen von D^* innerhalb I übereinstimmen, gilt das auch noch, wenn D^* nach A' fällt. Dann fällt E^* nach A und die Projektion des Körpers ist das Viereck $ABA'C$.

Hier ist A Projektion einer Strecke (nämlich EA) des Fünfecks, also des Körpers, denn dieser enthält das Fünfeck (dieses ist konvexe Hülle von fünf Punkten des Körpers). Da unser Körper als Fazetten lauter Dreiecke haben soll, sind die Urbilder der Ecken B, C, A' des Vierecks eindeutig bestimmt, also die Punkte B, C und D (vgl. den Schluß von **7.**). Wir können also auf diese Projektion **6.** anwenden.

Für die Ebene durch unsere Kante EA wählen wir hierbei die Ebene parallel zu g, die Projektionsrichtungen in dieser Ebene werden durch die Punkte von g dargestellt. Nach **6.** ist für alle diese Richtungen in genügender Nachbarschaft der zur Kante gehörigen die Projektion ein Fünfeck und sind die Urbilder der Ecken dieselben. Auch für die Punkte in II von g sind also A, B, C, D, E die Urbilder der Ecken der Körperprojektion.

Wir können also dasselbe Projektionsdiagramm weiter verwenden und sehen, daß für *alle* Projektionen, deren Bilder in II liegen, die Körperprojektion mit der Projektion unseres Fünfecks übereinstimmt.

Man überzeugt sich nun leicht, daß man in dieser Weise in jeden unschraffierten Teil der Figur gelangen kann. Als „Durchgangspunkte" stehen dazu in dem gezeichneten Fall die Punkte A, A', B', C' zur Verfügung, aber auch die unendlich fernen Punkte $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ der Geradenrichtungen. Zu $\overline{C}$ etwa gehört nämlich die Projektion in der Richtung der Kante AB, die ebenfalls ein Viereck ist, wenn nicht F auf AB liegt. Das ist aber sicher nicht der Fall, wenn die Geraden AB und $A'B'$ verschieden sind, also der Bereich I überhaupt vorhanden ist. Zu I und IV gehören also auch stets dieselben Urbilder.

In unserem Falle sind die sechs Bereiche in der Reihenfolge I, II, V, VI, III, IV durch die Punkte A', $\overline{B}$, C', $\overline{A}$, B' verknüpft, so daß für alle zu ihnen gehörigen Projektionsrichtungen die Körperprojektion mit der des Fünfecks $ABCDE$ übereinstimmt. Überzeugen wir uns, daß dasselbe für jede mögliche Lage der beiden Dreiecke ABC und $A'B'C'$ gilt!

Wir unterscheiden zwei Fälle:

a) F liegt im Innern von ABC.

b) F liegt auf dem Rand, etwa auf BC[6]).

In Fall a) sind die sechs Geraden alle verschieden, also die sechs Bereiche alle vorhanden, von I nach IV kommt man durch $\overline{C}$, von II nach V durch $\overline{B}$, von III nach VI durch $\overline{A}$. Liegen nun die drei Punkte A, B, C sämtlich außerhalb des Dreiecks $A'B'C'$, so kann man sie zur Verknüpfung der Paare untereinander verwenden, liegt aber etwa C innerhalb oder auf dem Rand von $A'B'C'$, wie in der Figur, so liegen sicher A' und B' außerhalb des Dreiecks ABC und können diese zur Verknüpfung dienen.

Im Fall b) fallen die Geraden BC und $B'C'$ zusammen, die Teile III und VI sind also nicht vorhanden, I und IV sind wieder durch $\overline{C}$, II und V durch $\overline{B}$ verknüpft. Beide Paare werden aber durch A und A' verbunden, so daß auch hier alle Teile zusammenhängen.

Aus dieser Tatsache folgt nun aber sofort, daß unser Körper mit dem Fünfeck $ABCDE$ identisch ist. Denn von jeder der sechs Geraden der Figur ist mindestens ein Punkt Randpunkt von einem (oder mehrere) der Bereiche I bis VI. Läßt man nun aber D^* stetig in einen solchen Randpunkt wandern, so fallen auch in der Grenzlage noch Körper- und Fünfeckprojektion zusammen, daraus folgt aber, daß die von der Geraden dargestellte Seitenfläche des Fünfecks auch den Körper begrenzt, und da dies für sämtliche sechs Seitenebenen des Fünfecks gilt, ist der Körper mit diesem identisch.

Wandert in der Figur z. B. der Punkt D^* nach A', so wird die Fünfeckprojektion das Viereck $ABA'C$, dieses ist also auch Projektion des Körpers.

---

[6]) In eine Ecke kann F nicht fallen, weil dann das Fünfeck ein Tetraeder wäre und kein echtes Fünfeck als Projektion haben könnte.

Daher sind aber AEB und AEC auch Seitenebenen des Körpers, denn die Projektionen AB und AC dieser Fazetten des Fünfecks begrenzen auch die Körperprojektion.

Als Ergebnis erhalten wir:

Im Fall A *ist unser Körper ein räumliches Fünfeck.*

Bemerken wir noch, daß der obige Fall b) in Wirklichkeit nicht vorkommt, hier ist nämlich unser Körper eine vierseitige Pyramide und hätte ein Begrenzungsviereck.

11. Es sei jetzt Fall B betrachtet, es sei $ABCD$ ein Parallelogramm, das unseren Körper begrenzt, die Ebene in der es liegt, wollen wir e nennen.

Für jede Projektionsrichtung parallel zu e kann die Projektion höchstens vier Ecken haben. Denn das Parallelogramm liefert stets zwei Ecken der Projektion, für beliebig benachbarte Richtungen außerhalb e aber drei (vgl. **4.**). Die Urbilder der Ecken bleiben also in keiner Umgebung unserer Richtung ungeändert, nach **5.** kann deshalb die Projektion kein echtes Fünfeck sein.

Sei jetzt d der Höchstabstand der Punkte unseres Körpers zur Ebene e, M die Menge aller Punkte des Körpers, die zu e den Abstand d haben.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

a) M ist eine Kante oder eine Seitenfläche des Körpers.

b) M ist eine Ecke des Körpers.

Im Falle a) haben alle Projektionen unseres Körpers in Richtungen parallel zu e (wenn M eine Kante ist, bis auf diejenige in der Kantenrichtung) zwei parallele Seiten. Auf diesen beiden Seiten liegen vier Ecken, andere Ecken kann die Projektion nicht haben. Sie ist also stets mit der Projektion der konvexen Hülle von M und $ABCD$ identisch. Unser Körper hat also alle Stützebenen (eventuell bis auf diejenigen, deren sphärische Bilder einem Großkreise angehören, was keine Rolle spielt) mit dieser konvexen Hülle gemeinsam, ist also mit ihr identisch.

Nun kann aber M keine Seitenfläche sein, denn nach **4.** gäbe es dann zu jeder Richtung in e eine benachbarte, bei der mindestens 3 Ecken von M und 3 Ecken von $ABCD$ Urbilder von Ecken der zugehörigen Projektion wären, so daß diese mindestens sechs Ecken hätte, was nicht sein kann.

Im Falle a) ist also unser Körper konvexe Hülle eines Parallelogramms und einer Strecke.

12. Betrachten wir jetzt den Fall b). M ist hier ein Punkt, ist die Projektionsrichtung parallel zur Ebene e, so wird M stets Urbild einer Ecke der Projektion.

Projizieren wir etwa in der Richtung der Parallelogrammkante AB, so liefern die Kanten AB und CD und der Punkt M je eine Ecke der Projektion, es kann also höchstens noch eine weitere Ecke geben. Von den beiden Ebenen ABM und CDM ist also wenigstens eine Seitenebene unseres Körpers, ist die Projektion ein Dreieck, dann sogar beide. Nehmen wir an, daß ABM Seitenebene ist.

Ebenso ist von den Ebenen ADM und BCM wenigstens eine Seitenebene, sei dies die Ebene ADM.

Sind beide Projektionen Dreiecke, so sind sämtliche vier Ebenen Seitenebenen, unser Körper ist dann die Pyramide mit Spitze M über $ABCD$. Sei also etwa die Projektion in Richtung AB ein echtes Viereck und Q das Urbild der vierten Ecke (Fig. 6). Q ist eindeutig bestimmt, weil nach 7. keine zwei Gegenecken eines Projektionsvierecks Urbild einer Strecke sein können. Weil ABM und ADM Seitenebenen sind, trifft die Gerade MQ die Ebene e innerhalb oder auf dem Rande der von den beiden Halbgeraden AB und AD begrenzten Viertelebene. Sei R der Schnittpunkt.

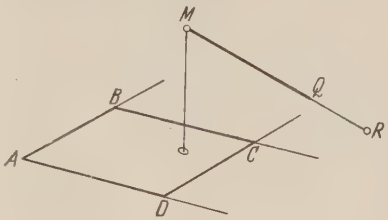

Fig. 6.

Projizieren wir jetzt in der Richtung der Kante MQ, und wählen e als Projektionsebene, so werden B, A und D Ecken der Projektion, ebenso R als Projektion der Kante MQ. Da R Projektion einer Kante ist, kann die Projektion keine weiteren Ecken haben. R liegt deshalb nicht zwischen den Trägergeraden von zwei Gegenseiten des Parallelogramms, sonst würde C außerhalb des Vierecks $ABRD$ liegen. Die Ebenen MQB und MQD sind also Seitenebenen des Körpers (sie sind die Urbilder der Projektionskanten BR und DR).

Die Ebene durch MQ parallel zu AD schneidet e in der Parallelen durch R zu AD, enthält also außer der Strecke MQ keine Punkte des Körpers. Bei der Projektion in der Richtung AD werden also die Strecken AD und BC und die Punkte M und Q Urbilder von Ecken der Projektion. Andere Ecken kann diese nicht haben, also ist die Ebene QBC Seitenebene des Körpers. Entsprechendes gilt für die Ebene QDC.

Von der konvexen Hülle der Strecke MQ und des Parallelogramms sind also sämtliche Seitenebenen auch Seitenebenen unseres Körpers, dieser ist mit der konvexen Hülle identisch.

Fall B ist damit vollständig behandelt, hier ist der Körper entweder eine vierseitige Pyramide oder die konvexe Hülle einer Strecke und eines Parallelogramms. Unter welchen Bedingungen eine solche konvexe Hülle lauter Fünfeckprojektionen hat, soll später erörtert werden (vgl. § 3).

13. Wenden wir uns jetzt Fall C zu! Das Viereck $ABCD$ in der Ebene e sei ein Begrenzungsviereck des Körpers, die Seiten AB und CD seien nicht parallel. Es gibt dann eine Viereckseite, etwa die Seite BC, in deren Endpunkten das Viereck parallele Stützgeraden hat (vgl. Fig. 7). Ist $\mathfrak{a}$ ein Vektor in der Richtung der parallelen Stützgeraden in B und C, so gibt es nach 1. zu $\mathfrak{a}$ beliebig benachbarte Projektionsrichtungen für die die vier Punkte B, A, D, C Ecken der Projektion liefern.

Projiziert man also in der Richtung $\mathfrak{a}$, so kann es außer der Projektion des Vierecks — die natürlich eine Strecke wird — nur noch höchstens eine Projektionsecke geben. Denn gäbe es mehr, so hätten die Projektionen in benachbarten Richtungen Ecken in deren Nähe, und unter diesen gäbe es dann solche, die mindestens sechs Ecken hätten.

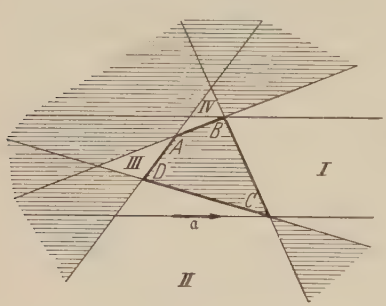

Fig. 7.

Die Projektion unseres Körpers in der Richtung $\mathfrak{a}$ ist also ein Dreieck; wäre sie eine Strecke, so wäre der Körper mit dem Viereck $ABCD$ identisch und dieser Fall braucht nicht weiter betrachtet zu werden. Dasselbe gilt für jede zu $\mathfrak{a}$ benachbarte Projektionsrichtung der Ebene e.

Betrachten wir jetzt wieder die Menge M der Punkte des Körpers, die von e maximale Entfernung haben. M ist hier ein Punkt, denn sonst wären die eben erwähnten Projektionen (wenn M eine Strecke ist, eventuell bis auf eine) keine Dreiecke, sondern Vierecke mit zwei parallelen Seiten, wie in **11.**

Wir untersuchen jetzt die Pyramide $MABCD$ und machen von ihr wie im Falle A ein Projektionsdiagramm. Als Projektionsebene wählen wir die Ebene e, die Projektionsrichtung wird dargestellt durch die Projektion M^* von M. Nur die Projektionsrichtungen parallel zu e sind dabei zunächst ausgeschlossen, man kann sie aber durch uneigentliche Punkte von e dargestellt denken.

Die Projektion unserer Pyramide ist die konvexe Hülle der fünf Punkte A, B, C, D, M^*, sie ist also ein echtes Fünfeck, wenn M^* in dem nicht schraffierten Teil der Figur liegt.

Für Projektionsrichtungen parallel zu e ist M einziges Urbild einer Projektionsecke des Körpers, also auch für genügend benachbarte Richtungen. Liegt M^* also in der Richtung $\mathfrak{a}$ genügend weit nach rechts, so hat die Projektion unseres Körpers die Ecken A, B, C, D, M^*, ist also mit der Projektion der Pyramide identisch. Wie in **10.** folgert man daraus, daß für alle Punkte M^* in dem Bereiche I die Projektionen beider Körper identisch sind.

Da der Bereich I von den Geraden AB, BC und CD begrenzt wird, folgt wie in **10.**, daß unser Körper von den Seitenflächen MAB, MBC und MCD der Pyramide begrenzt wird.

Ist nun AD nicht parallel zu BC, so kann man dieselbe Betrachtung auch für den Bereich II anstellen, dann folgt, daß auch MAD unseren Körper begrenzt. Der Körper ist dann mit der Pyramide $MABCD$ identisch.

Es bleibt also nur der Fall zu betrachten, in dem $AD \parallel BC$ (Fig. 8). Wandern wir jetzt mit M^* in den Punkt C, so wird die Projektion von Körper und Pyramide das Viereck $ABCD$, C ist dabei Projektion der Kante MC. Sind die Urbilder von A, B, D jetzt immer noch eindeutig bestimmt, so kann man das Verfahren aus **7.** anwenden. wie in **10.** findet man, daß auch für alle Lagen von M^* in II die Projektionen von Körper und Pyramide zusammenfallen. Da II auch von der Geraden AD begrenzt wird, ist MAD Begrenzungsebene des Körpers und dieser wieder mit der Pyramide identisch.

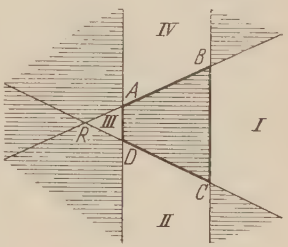

Fig. 8.

Wir können also annehmen, daß wenigstens einer der Punkte A, B, D Projektion einer zu MC parallelen Strecke ist. Für A als Gegenecke von C ist das nach **7.** unmöglich, für B ebenfalls, weil die Projektion dieser Strecke in der Richtung MB außerhalb des zu dieser Richtung gehörigen Projektionsvierecks $ABCD$ fallen würde, es muß also D Projektion einer zu MC parallelen Körperkante CQ sein.

Nun ist aber in diesem Falle $MCDQ$ Begrenzungsviereck des Körpers und kein Parallelogramm, denn Q muß näher als M bei e liegen. Von der Ebene dieses Vierecks hat der Punkt B des Körpers die größte Entfernung, denn die Projektion in der Richtung MC ist das Viereck $ABCD$.

Wenden wir auf dieses neue Begrenzungsviereck dieselben Schlüsse an wie zuerst auf $ABCD$, so finden wir, daß unser Körper von den Ebenen MCB, BCD und BMQ begrenzt wird.

Nun ging aber durch die Kante BM schon die Seitenebene BMA, diese ist also mit BMQ identisch, so daß Q in der Ebene BMA liegen muß. Die Strecke MQ geht also durch den Schnittpunkt R von AB und CD. Projizieren wir jetzt in der Richtung AD, so werden M und Q und die Kanten AD und BC Urbilder von Ecken der Projektion, da diese keine weiteren Ecken haben kann, ist auch QAD Seitenebene unseres Körpers.

Unser Körper ist also mit dem dreiseitigen Pyramidenstumpf $MBCQAD$ identisch. Umgekehrt hat jeder dreiseitige Pyramidenstumpf mit parallelen Gegenflächen lauter Fünfeckprojektionen.

Fassen wir jetzt unsere Ergebnisse in den Fällen A, B, C zusammen, so ergibt sich in der Tat die Aussage des Fünfecksatzes.

§ 3.

Sechsecke mit lauter Fünfeckprojektionen.

14. Fragen wir uns jetzt noch, unter welchen Bedingungen die konvexe Hülle eines Parallelogramms $ABCD$ und einer Strecke PQ lauter Fünfeckprojektionen hat. Da eine Projektion parallel zur Parallelogrammebene stets ein Viereck ist, kann man die Parallelogrammebene als Projektionsebene wählen, die Projektion ist dann die konvexe Hülle von Parallelogramm und Streckenprojektion.

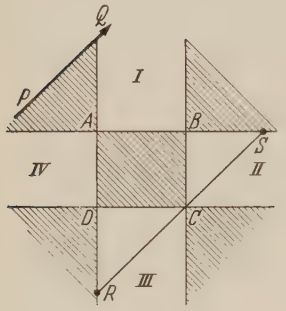

Fig. 9.

Fragen wir uns also zunächst, wann die konvexe Hülle einer Strecke P_1Q_1 und eines Parallelogramms $ABCD$ in einer Ebene ein echtes Sechseck ist. Da die Fragestellung affin invariant ist, dürfen wir das Parallelogramm der Einfachheit halber als Rechteck zeichnen (Fig. 9).

Offenbar kann die Projektion nur dann ein Sechseck werden, wenn P_1 und Q_1 beide in dem nicht schraffierten Teil der Figur liegen. Wir haben nun verschiedene Möglichkeiten für die Lage von P und Q.

α) Liegen P_1 und Q_1 in demselben der vier Bereiche I, II, III, IV, so wird die Hülle nur dann kein Sechseck, wenn die Streckengerade das Parallelogramm trifft.

β) Liegen P_1 und Q_1 in gegenüberliegenden Bereichen, etwa P_1 in I und Q_1 in III, so ist die Hülle stets ein Sechseck.

γ) Liegen P_1 und Q_1 in benachbarten Bereichen, etwa P_1 in II und Q_1 in III, so ist die Hülle nur dann ein Sechseck, wenn die Strecke das Parallelogramm nicht trifft.

Wir betrachten jetzt zwei Möglichkeiten:

a) Die Strecke PQ ist zur Parallelogrammebene parallel.

b) Die Gerade PQ trifft die Parallelogrammebene in einem Punkte R.

15. Im Falle a) ist die Projektion P_1Q_1 von PQ stets parallel zum Urbild und gleich lang, umgekehrt kann jede Strecke dieser Art als Projektion von PQ aufgefaßt werden. Wir erhalten also sämtliche Projektionsmöglichkeiten, wenn wir eine Strecke P_1Q_1 mit $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P_1Q_1}$ in der Parallelogrammebene herumschieben.

Sei nun

$$\overrightarrow{PQ} = a \cdot \overrightarrow{AB} + b \cdot \overrightarrow{AD}. \tag{1}$$

Sechseckprojektionen in den Lagen α) und β) können dann nur dann nicht vorkommen, wenn

$$|a| \geqq 1, \quad |b| \geqq 1. \tag{2}$$

Um festzustellen, wann es Sechseckprojektionen in der Lage γ) gibt, ziehen wir durch C (gegebenenfalls müßte man B oder D wählen) eine Parallele zu PQ und schneiden sie mit AD und AB, R und S seien die Schnittpunkte. Offenbar kann man nur dann die Projektion P_1Q_1 so weit hereinschieben, daß sie das Rechteck trifft, wenn RS größere Länge hat als PQ.

Nun hat die Gerade RS in dem Koordinatensystem mit Ursprung A und Basisvektoren AB und AD die Gleichung

$$\frac{x-1}{a} = \frac{y-1}{b}.$$

S hat also die Koordinaten $\left(1 - \frac{a}{b}, 0\right)$ und R die Koordinaten $\left(0, 1 - \frac{b}{a}\right)$. Daraus folgt aber, daß $RS = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\overline{PQ} = \left(\frac{1}{|a|} + \frac{1}{|b|}\right)\overline{PQ}$.

Bei anderer Vorzeichenverteilung von a und b erhält man dasselbe Ergebnis.

Notwendig und hinreichend, damit unser Körper lauter Fünfeckprojektionen hat, ist die Bedingung

$$\frac{1}{|a|} + \frac{1}{|b|} \leqq 1. \tag{3}$$

(2) ist dann nämlich von selbst erfüllt.

16. Im Falle b) liegt R, wie wir in **12.** gesehen haben, in einem der schraffierten Teile der Fig. 10, nehmen wir an in dem Teil bei D, wie gezeichnet. R gehört nicht zur Strecke, nehmen wir an, daß P zwischen R und Q liegt.

Offenbar geht für jede Projektionsrichtung die Gerade P_1Q_1 durch R und ist

$$\frac{\overline{RP}}{\overline{RQ}} = \frac{\overline{RP_1}}{\overline{RQ_1}}.$$

Die Projektionsrichtung kann so gewählt werden, daß P_1Q_1 längs einer beliebigen Geraden durch R fällt.

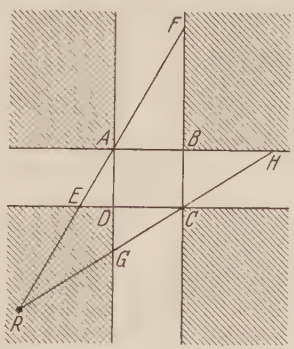

Fig. 10.

Wir ziehen jetzt RA und RC und bestimmen die Schnittpunkte E, F, G, H. Nur dann hat nun auf den Geraden zwischen RF und RH eine Projektion P_1Q_1 keinen Platz und ist eine Sechseckprojektion in der Lage γ) unmöglich, wenn

$$\frac{\overline{RG}}{\overline{RH}} \geqq \frac{\overline{RP}}{\overline{RQ}}, \qquad \frac{\overline{RE}}{\overline{RF}} \geqq \frac{\overline{RP}}{\overline{RQ}}. \tag{4}$$

Offenbar sind dann auch die Lagen α) und β) unmöglich, so daß die Bedingungen (4) notwendig und hinreichend sind.

Liegt Q zwischen R und P, so erhält man entsprechend die Bedingungen

$$\frac{\overline{RG}}{\overline{RH}} \geqq \frac{\overline{RQ}}{\overline{RP}}, \quad \frac{\overline{RE}}{\overline{RF}} \geqq \frac{\overline{RQ}}{\overline{RP}}. \tag{5}$$

Anschaulicher wird das Ergebnis, wenn man sich einmal den Schnittpunkt R, die hindurchgehende Trägergerade g der Strecke, und auf ihr einen Endpunkt P der Strecke vorgegeben denkt. Aus (4) und (5) folgt dann, daß die konvexe Hülle von Strecke und Parallelogramm dann und nur dann lauter Fünfeckprojektionen hat, wenn der zweite Endpunkt Q der Strecke liegt außerhalb eines Intervalls ST auf g, das P enthält und R nicht.

Hat die kleinste der beiden Zahlen $\frac{\overline{RG}}{\overline{RH}}$ und $\frac{\overline{RE}}{\overline{RF}}$ den Wert k, so ist offenbar

$$\frac{\overline{RS}}{\overline{RP}} = \frac{\overline{RP}}{\overline{RT}} = k.$$

(Eingegangen am 30. November 1941.)

Über eine gewisse Klasse von Strömungen zäher Flüssigkeiten und eine Kennzeichnung der Poiseuille-Strömung.

Von

H. Görtler und K. Wieghardt in Göttingen.

Die Strömungen zäher Flüssigkeiten genügen den Navier-Stokesschen Impulserhaltungsgleichungen, welche in der Vektorgleichung

$$\frac{d\mathfrak{w}}{dt} = -\operatorname{grad}\left(\frac{p}{\varrho} + V\right) + \nu \Delta \mathfrak{w} \tag{1}$$

zusammengefaßt werden, und der Massenerhaltungsgleichung

$$\operatorname{div} \mathfrak{w} = 0 \tag{2}$$

($\mathfrak{w}$ Geschwindigkeitsvektor, p Druck, ϱ konstante Dichte, ν kinematische Zähigkeit, V Potential der äußeren Kräfte $\mathfrak{K} = -\operatorname{grad} V$, t Zeit).

Wir betrachten im folgenden *ebene* und *stationäre* Strömungen. Man pflegt die Kontinuitätsgleichung (2) durch Einführung der Stromfunktion ψ zu erfüllen, welche unter Zugrundelegung rechtwinkliger cartesischer Koordinaten x, y durch

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{2a}$$

definiert ist. Darin sind u und v die Komponenten von $\mathfrak{w}$ in x- bzw. y-Richtung. Man hat es dann nur noch mit den Gleichungen (1) für die Unbekannten ψ und p zu tun.

Wir wollen voraussetzen, daß die Geschwindigkeit im betrachteten Bereich stetige partielle Ableitungen nach x und y bis zur dritten Ordnung einschließlich besitze.

Schreibt man (1) mit $\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial t} = 0$ um in die Gestalt

$$\operatorname{grad}\left(\frac{\mathfrak{w}^2}{2} + \frac{p}{\varrho} + V\right) = \mathfrak{w} \times \operatorname{rot} \mathfrak{w} + \nu \Delta \mathfrak{w}, \tag{1a}$$

so erkennt man unmittelbar, daß dann besonders einfache Verhältnisse eintreten, wenn *die Reibungskräfte $\nu \Delta \mathfrak{w}$ ein skalares Potential besitzen*:

$$\Delta \mathfrak{w} = -\operatorname{grad} H. \tag{3}$$

Man kann dann nämlich durch skalare Multiplikation von (1a) mit $\mathfrak{w}/|\mathfrak{w}|$ und Integration längs Stromlinien eine Bernoulli-Gleichung der Form

$$\frac{\mathfrak{w}^2}{2} + \frac{p}{\varrho} + V + \nu H = f(\psi) \tag{4}$$

gewinnen, worin f auf Stromlinien konstant ist.

Einige Klassen solcher Strömungen sind bekannt. Als triviale Beispiele seien die *Potentialströmungen* zäher Flüssigkeiten und die allgemeinere, diese Klasse umfassende Gesamtheit der *Strömungen mit konstanter Drehung* genannt ($H = \text{const}$). Darüber hinaus ist nur der Fall der *Poiseuille-Strömung* bekannt, wo H eine ganze lineare Funktion der Ortskoordinaten wird: $H = ax + by + c$.

Es entsteht somit die Frage, ob es noch weitere Strömungen gibt, die der Zusatzforderung (3) genügen, oder ob die eben genannten Beispiele bereits die Gesamtheit der Strömungen darstellen, für welche die Reibungskräfte ein skalares Potential besitzen.

Um das Ergebnis vorwegzunehmen: Die durch (3) abgegrenzte Klasse zäher Strömungen ist in der Tat durch die eben genannten Fälle erschöpft. *Es ist also die Poiseuille-Strömung die einzige (ebene, stationäre) Strömung zäher Flüssigkeiten, für welche die Reibungskräfte ein nicht konstantes skalares Potential besitzen.* Für diese merkwürdige Kennzeichnung der Poiseuille-Strömung soll im folgenden ein einfacher Beweis gegeben werden.

Wir bemerken zunächst, daß nach (3) und (2 a)

$$\Delta \psi_y = -H_x, \quad \Delta \psi_x = H_y \tag{5}$$

gilt. Es ist also $\Delta \psi + iH = w(x + iy)$ eine analytische Funktion von $z = x + iy$, und ψ selbst ist eine reguläre biharmonische Funktion:

$$\Delta \Delta \psi = 0. \tag{6}$$

Durch Einsetzen von (4) in (1a) erhält man

$$\begin{aligned} \mathfrak{w} \times \operatorname{rot} \mathfrak{w} &= \operatorname{grad} f(\psi) \\ &= f'(\psi) \operatorname{grad} \psi. \end{aligned}$$

Nun gilt andererseits nach Definition der Stromfunktion

$$\mathfrak{w} \times \operatorname{rot} \mathfrak{w} \equiv \Delta \psi \cdot \operatorname{grad} \psi.$$

Also folgt, solange $\operatorname{grad} \psi \neq 0$,

$$\Delta \psi = f'(\psi). \tag{7}$$

Kennt man irgendwelche Lösungen ψ und $f(\psi)$ gemäß (6) und (7), so kann man aus der Bernoulli-Gleichung (4) den Druck berechnen und hat damit die hydrodynamischen Grundgleichungen (1) und (2) erfüllt.

Unsere Fragestellung reduziert sich somit auf das Problem, die Gesamtheit der Lösungen ψ und $f(\psi)$ des Systems

$$\begin{aligned} \Delta \psi &= f'(\psi) \\ \Delta \Delta \psi &= 0 \end{aligned} \tag{*}$$

zu ermitteln.

1. Die trivialen Lösungen.

a) $f(\psi) - a = \text{const}$. Dann ist $\Delta\,\psi = 0$, die biharmonische Funktion ψ ist also speziell eine harmonische, die zugehörigen Strömungen sind die Potentialströmungen zäher Flüssigkeiten.

b) $f(\psi) = a + b\,\psi$ (a, b konstant, $b \neq 0$). Es liegt die Gesamtheit der Strömungen mit nichtverschwindender konstanter Rotation vor: $\Delta\,\psi = b$. Zu dieser Klasse gehört insbesondere als bekannteste die *Couette-Strömung*. Allgemein ist $\psi = P_2(x, y) + \psi_p$, wo P_2 ein Polynom 2. Grades in x, y und ψ_p eine reguläre Potentialfunktion bezeichnen.

Wenn wir die Gesamtheit der Lösungen, für welche $f''(\psi) \equiv 0$ ist, als „triviale" Lösungen unseres Problems bezeichnen, ist mit den genannten linear superponierbaren Lösungen die Klasse der trivialen Lösungen ausgeschöpft.

2. Der nicht-triviale Fall.

Durch Einsetzen von (7) in (6) folgt allgemein

$$\Delta f'(\psi) = 0, \tag{8}$$

also durch einfaches Ausrechnen:

$$\Delta f'(\psi) = (\psi_x^2 + \psi_y^2)\, f'''(\psi) + f''(\psi)\, \Delta\,\psi = 0.$$

Sieht man vom „trivialen" Fall $f''(\psi) \equiv 0$ (also auch von $\Delta\,\psi \equiv 0$) ab, so verschwindet demnach auch $f'''(\psi)$ nicht identisch. Wegen $\psi_x^2 + \psi_y^2 = \mathfrak{w}^2$ und $\Delta\,\psi = f'(\psi)$ ergibt sich dann

$$\mathfrak{w}^2 = -\frac{f'(\psi)\, f''(\psi)}{f'''(\psi)}, \tag{9}$$

d. h. *die Geschwindigkeit ist auf den einzelnen Stromlinien* $\psi = \text{const}$ *dem Betrage nach konstant.* Auf Grund der Kontinuitätsgleichung $\operatorname{div}\mathfrak{w} = 0$ *haben also je zwei infinitesimal benachbarte Stromlinien des Stromlinienfeldes konstanten Normalabstand.*

Ferner kann wegen $\Delta\,\psi = f'(\psi)$ geschlossen werden, daß $|\operatorname{rot}\mathfrak{w}| = |f'(\psi)|$, d. h. *auch die Rotation ist auf den einzelnen Stromlinien konstant.* Da $\Delta\,\psi + iH$ eine analytische Funktion von $x + iy$ darstellt, bilden somit die *Linien* $H = \text{const}$ *in der Strömungsebene die Orthogonaltrajektorien der Stromlinien* $\psi = \text{const}$.

Es ist nun leicht, den direkten Beweis unserer Behauptung zu erbringen. Wir können es uns aber noch besonders bequem machen, indem wir auf eine sehr bekannte Untersuchung von G. Hamel[1]) zurückgreifen. In dieser Abhandlung gibt Hamel die erschöpfende Antwort auf folgende Frage: Gibt es sta-

[1]) G. Hamel, Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung XXV (1917), S. 34—60.

tionäre Lösungen der hydrodynamischen Grundgleichungen zäher inkompressibler Flüssigkeiten, bei denen die Stromlinien die gleichen sind wie bei einer Potentialströmung, während die Geschwindigkeitsverteilung eine andere ist?

Offenbar handelt es sich bei unserem Problem, in welchem sich die Stromlinien $\psi = \text{const}$ der zähen Flüssigkeit mit den Stromlinien $\Psi = \Delta\,\psi = \text{const}$ einer Potentialströmung ($\Delta\,\Psi = \Delta\,\Delta\,\psi = 0$) decken, nur noch darum, unter den Lösungen des Hamelschen Problems diejenigen auszusondern, die auch noch den weiteren Forderungen unseres Problems gerecht werden. Da die Stromlinien $\psi = \text{const}$ der von uns gesuchten Strömungen konstanten, auf den Orthogonaltrajektorien gemessenen Abstand besitzen sollen, kommen jedenfalls die Hamelschen Strömungen längs logarithmischer Spiralen sowie der Grenzfall reiner Radialströmungen hier in Fortfall. Es bleiben nur noch näher zu betrachten die übrigen Hamelschen Grenzfälle: a) Die Stromlinien sind konzentrische Kreise, b) die Stromlinien sind parallele Geraden.

a) Was den ersten dieser verbleibenden Fälle betrifft, so erhält man in Polarkoordinaten r, φ als Lösung von $\Delta\,\Delta\,\psi = 0$:

$$\psi = A \ln r + B + r^2 (C \ln r + D). \tag{10}$$

Für $C = 0$ liegt die Couette-Strömung zwischen koaxialen rotierenden Zylindern vor, also eine der hier nicht in Betracht kommenden trivialen Lösungen unseres Problems. Für $C \neq 0$ liefert dagegen (10) eine Lösung des mathematischen Problems (*) der gesuchten Art. Allein aus Gründen der *physikalischen* Realisierbarkeit müssen wir sie ausscheiden, da sie, worauf ebenfalls schon Hamel hingewiesen hat, eine Vieldeutigkeit des Drucks beim Umlaufen der singulären Stelle $r = 0$ liefert. Dies erkennt man in unserer Darstellungsweise unmittelbar aus der Bernoulli-Gleichung (4), denn wegen $\Delta\,\psi = 4\,(C + D) + 4\,C \ln r$ ist der Imaginärteil H der analytischen Funktion $\Delta\,\psi + iH = w(x + iy)$ durch

$$H = 4\,C\,\varphi + \text{const}$$

gegeben.

b) Es bleibt also nur der Fall geradlinig-paralleler Stromlinien. Setzen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\psi = \psi(y)$, so wird wegen $\psi^{\mathrm{IV}}(y) = 0$

$$\psi = \frac{a}{3!}\,y^3 + \frac{b}{2!}\,y^2 + c\,y + d. \tag{11}$$

Die hierdurch gegebene Strömung mit parabolischem Geschwindigkeitsprofil $u = \psi_y$, $v = 0$ ist die bekannte *Poiseuille-Strömung*. Es wird $f' = a\,y + b$, und f' als Funktion von ψ ergibt sich als Wurzel einer kubischen Gleichung.

Damit ist die oben behauptete und zunächst überraschende Kennzeichnung der Poiseuille-Strömung vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 25. Dezember 1941.)

Zur eindeutigen Lösbarkeit der potentialtheoretischen Randwertaufgaben bei nichtbeschränkten Randwerten.

Von

Karl Maruhn, Berlin.

I. Einleitung.

Bereits PLEMELJ [1]) gelang es, die Existenz von Lösungen der zweiten und dritten potentialtheoretischen Randwertaufgabe (nur mit diesen werden wir uns hier beschäftigen) mit Hilfe von Integralgleichungen für stetig gekrümmte Berandungen auch dann zu beweisen, wenn die Randfunktion f nicht notwendig beschränkt, aber absolut integrierbar ist; es war von dieser im übrigen lediglich zu verlangen, daß man mit ihr als Belegung ein überall auf dem Rand stetiges Potential der einfachen Schicht bilden kann. Ist diese Bedingung erfüllt, so nehmen im allgemeinen die Ausdrücke $\frac{\partial u}{\partial n}$ bzw. $\frac{\partial u}{\partial n} + hu$ mit u als gesuchter Lösung und h als bekannter, absolut integrierbarer, ebenfalls nicht notwendig beschränkter Funktion bei Annäherung an die Berandung in allen Endlichkeitspunkten von f und h die vorgeschriebenen Werte an.

Merkwürdigerweise wurde die Frage der Unität von PLEMELJ und später auch von CARLEMAN [2]), der die PLEMELJschen Betrachtungen auf Berandungen mit Ecken (bzw. Kanten) erweiterte, nur auf Grund der GREENschen Formeln behandelt, die aber im Falle nichtbeschränkter Randwerte keineswegs mehr gültig zu sein brauchen, so daß daher neben dem ansatzmäßig eingeführten Potential der einfachen Schicht noch weitere Lösungen existieren könnten [2a]). Soweit mir bekannt ist, sind auch später keine den PLEMELJschen Existenzsätzen entsprechenden allgemeinen Einzigkeitsuntersuchungen durchgeführt worden [3]).

---

[1]) J. PLEMELJ, Über lineare Randwertaufgaben der Potentialtheorie I, II. Monatshefte für Math. u. Phys. **15** (1904), S. 337—411; **18** (1907), S. 180—211; ferner vgl. E. PICARD, Rend. del Circ. Mat. di Palermo **22** (1906), S. 241—259.

[2]) T. CARLEMAN, Über das NEUMANN-POINCARÉsche Problem für ein Gebiet mit Ecken. Inaug.-Diss. Upsala 1916.

[2a]) Vgl. K. MARUHN, Einige Bemerkungen zu den Randwertaufgaben der Potentialtheorie. Sitz.ber. d. Berliner Math. Ges. **40**. (Erscheint demnächst.) Dort wird an einem Beispiel gezeigt, daß dieser Fall tatsächlich eintreten kann.

[3]) Für die zweite Randwertaufgabe beim Kreis liegt eine noch unveröffentlichte Untersuchung von H. SÖHNGEN vor; die Randwerte werden dort als quadratisch integrierbar angenommen.

Im folgenden soll ein Anfang damit gemacht werden, diese Lücke zu schließen, indem wir folgende Frage zu beantworten suchen: *Gegeben sei in der Ebene oder im Raume ein endlicher Bereich T, dessen Berandung S stetig gekrümmt sei*[4]*. Auf letzterer ist (spezieller als bei* Plemelj*) eine absolut integrierbare Funktion f gegeben, die an endlich vielen Stellen nicht notwendig beschränkt, im übrigen aber stetig ist und der die Ausdrücke $\frac{\partial u}{\partial n}$ bzw. $\frac{\partial u}{\partial n} + hu$ bei Annäherung an S zustreben sollen, unter h eine weitere, wie f beschaffene Randfunktion*[5] *verstanden. Welchen zusätzlichen Bedingungen muß die Lösung u der zweiten und dritten potentialtheoretischen Randwertaufgabe unterworfen sein, damit es im Rahmen dieser Einschränkungen unter den obengenannten Voraussetzungen über die Randfunktionen f und h höchstens eine einzige Lösung geben kann?*

Es sollen hier zwei Wege beschritten werden, um zu solchen Bedingungen für u zu gelangen. Im Abschnitt II werden diese so gestaltet, daß die Greenschen Formeln auch jetzt noch gültig bleiben. In III, wo nur das zweidimensionale Problem behandelt wird, wird das zweite Randwertproblem auf das erste für die konjugierte Potentialfunktion $\bar{u}$ zurückgeführt, und es muß demgemäß u so beschaffen sein, daß letzteres in einer einzigen Weise lösbar ist; so ergibt sich für das zweite Randwertproblem und unter den gleichen Annahmen auch für das dritte zwangsläufig die Darstellbarkeit von u als Potential einer einfachen Schicht. — Der erste Weg führt auf Forderungen, denen u im Innern von T in der Nähe des Randes genügen muß, während der zweite im wesentlichen ein gewisses Randverhalten von u festlegt; gerade der letztere Fall ist für manche Anwendungen[6] nützlich. In jedem Fall ist natürlich noch zu prüfen, ob die Plemeljsche Lösung diesen Bedingungen genügt. — Im Abschnitt IV wird schließlich ein zweiter Beweis für eine wichtige, schon in III behandelte Stetigkeitseigenschaft des Potentials einer einfachen Schicht mit nichtbeschränkter Belegungsdichte gegeben, der sich aber diesmal ohne Mühe auch auf den Raum übertragen läßt. — Es sei bemerkt, daß allen Betrachtungen der Riemannsche Integralbegriff zugrunde liegt.

In diesem Zusammenhang will ich noch auf Einzigkeitsbetrachtungen hinweisen, die bei allgemeineren Problemstellungen durchgeführt wurden. Einem Hinweis Plemeljs folgend[7] verallgemeinerten Evans, Miles und

---

[4]) Es kann auch eine endliche Anzahl Ecken bzw. Kanten zugelassen werden; ferner lassen sich die Betrachtungen auch auf nichtbeschränkte Bereiche T übertragen.

[5]) Um die Betrachtungen zu vereinfachen, nehmen wir in Teil II h als durchweg stetig an; doch bieten eine endliche Zahl von Unendlichkeitsstellen keine neuen methodischen Schwierigkeiten (vgl. II c).

[6]) Solche finden sich in meiner l. c. 2a) genannten Arbeit.

[7]) J. Plemelj, Potentialtheoretische Untersuchungen, Leipzig 1911; insbesondere S. 43f.

Garret[8]) das zweite Randwertproblem dahin, daß an Stelle der Randwerte von $\frac{\partial u}{\partial n}$ das Integral darüber (d. h. der Fluß) als Randfunktion eingeführt wurde: z. B. in der Ebene: $\int_{s_0}^{s} \frac{\partial u}{\partial n} ds' =$ gegebene Funktion f. Die Lösung ergibt sich auch hier als ein Potential der einfachen Schicht, das jetzt aber als Stieltjes-Integral auftritt; sie ist unter gewissen, sehr allgemeinen Bedingungen, die weiter als die im folgenden von mir angegebenen reichen, auch die einzige. Bei diesen Betrachtungen mußte jedoch der Riemannsche Integralbegriff verlassen werden, und es zeigt sich demgemäß bei Zurückführung auf unser Problem, daß dessen Randbedingungen nur in „fast allen" Punkten erfüllt sind, wobei sich über die Lage der Ausnahmepunkte nichts aussagen läßt. Da gerade dieser Umstand bei Anwendungen störend ist, scheint es nützlich zu sein, die Plemeljsche Problemstellung, nur vom Riemannschen Integral ausgehend, hinsichtlich der Einzigkeit zu behandeln, zumal die Betrachtungen wegen der speziellen Annahmen sehr einfach sind und sich leicht auch auf das bei den obengenannten Autoren nicht behandelte dritte Randwertproblem ausdehnen lassen. — Andere Verallgemeinerungen des zweiten Randwertproblems, die aber ebenfalls unser Problem nicht umfassen, betrachtet Cimmino[9]), indem er gewisse Integralmittelwerte von $\left(\int_{s_0}^{s} \frac{\partial u}{\partial n} ds' - f\right)$, erstreckt über geeignet definierte Nachbarflächen, bei Annäherung an den Rand verschwinden läßt.

II. Unitätssätze, die auf der Greenschen Formel beruhen.

a) Zweite Randwertaufgabe.

Vorgelegt sei im Raume ein von einer einzigen geschlossenen, stetig gekrümmten Jordanschen Fläche S berandetes endliches Gebiet T. Auf S sei eine Funktion $f(\sigma)$ gegeben, die an endlich vielen Stellen nicht notwendig beschränkt zu sein braucht, im übrigen aber stetig verläuft und in jedem

---

[8]) S. C. Evans, The Logarithmic Potential, Discontinuous Dirichlet and Neumann Problems. New York 1927. Ferner z. B. S. C. Evans and E. R. C. Miles, Potentials of general masses in single and double layers. The relative boundery value problems. American Journal of Math. **53** (1931), S. 493—516. G. A. Garret, Necessary and sufficient conditions for potentials of single and double layers. American Journal of Math. **58** (1936), S. 95—129.

[9]) G. Cimmino, Nuovo tipo di condizione al contorno e nuovo metodo di trattazione per il problema generalizzato di Dirichlet. Rend. Circ. matem. di Palermo **61** (1937), S. 177—220, insbes. S. 206.

abgeschlossenen Stetigkeitsintervall gleichmäßig eine Lipschitz-Bedingung[10]) (kurz L-Bedingung) befriedigt. Es existiere $\int_S |f(\sigma)|\, d\sigma$ und es sei

$$\int_S f(\sigma)\, d\sigma = 0 \quad (\sigma \text{ ein Punkt auf } S, d\sigma \text{ das Flächenelement}).$$

Weiterhin denken wir uns (vgl. Fig. 1) in T zu S die Schar der Parallelflächen S_δ (die die Bereiche T_δ beranden) gezogen, wobei δ den Abstand zwischen S und S_δ bedeutet ($S_0 = S$); für hinreichend kleine δ, etwa $\delta < \delta_0$, ist dies möglich. Ordnet man überdies diejenigen Punkte von S und S_δ, die auf der gleichen Normalen (n) zu S liegen, einander zu, so besteht eine umkehrbar eindeutige Abbildung zwischen S und S_δ. Es gilt nun der folgende

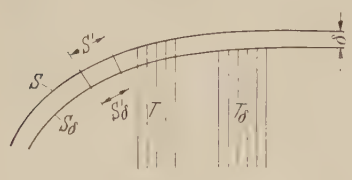

Fig. 1.

Unitätssatz: Es gibt (bis auf eine additive Konstante) höchstens eine in T reguläre, in $T+S$ dem Absolutbetrag nach beschränkte Lösung u der Gleichung $\Delta u = 0$, deren Ableitung in Richtung (n) der Innennormalen bei Annäherung an jedes abgeschlossene Stetigkeitsintervall von f auf S gleichmäßig gegen den vorgeschriebenen Wert $f(\sigma)$ konvergiert[11]) und für die bezüglich der Parallelkurven S_δ

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{S_\delta} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| d\sigma_\delta = \int_S |f(\sigma)|\, d\sigma \tag{1}$$

ist, unter $d\sigma_\delta$ das Flächenelement auf S_δ verstanden.

Beweis. Der Einfachheit halber nehmen wir eine einzige Stelle der Nichtbeschränktheit von $f(\sigma)$ an. Es möge etwa zwei Lösungen u_1 und u_2 geben und es sei $u_1 - u_2 = v$ mit

$$|v| < A \tag{2}$$

gesetzt. Es liege nun die Parallelkurve S_δ so nahe bei S, $\delta < \delta_1$, daß

$$\left| \int_{S_\delta} \left| \frac{\partial u_1}{\partial n} \right| d\sigma_\delta - \int_S |f|\, d\sigma \right|, \quad \left| \int_{S_\delta} \left| \frac{\partial u_2}{\partial n} \right| d\sigma_\delta - \int_S |f|\, d\sigma \right| < \frac{\varepsilon}{8A} \tag{3}$$

---

[10]) D. h. für beliebige Punktepaare $(\sigma, \bar{\sigma})$ eines solchen Intervalls mit dem (auf S gemessenen) kürzesten Abstand $\delta_{\sigma\bar{\sigma}} < h_0$ besteht eine Ungleichung der Form $|f(\sigma) - f(\bar{\sigma})| < c\, \delta_{\sigma\bar{\sigma}}^{\varrho}$, ($c$, ϱ, h_0 konstant, $0 < \varrho < 1$).

[11]) Dann verhält sich $\frac{\partial u}{\partial n}$ beim Übergang auf ein solches Intervall stetig. Umgekehrt folgt aus dem stetigen Übergang auch die gleichmäßige Konvergenz.

ist, unter ε eine beliebig kleine, fest vorgegebene positive Zahl verstanden. Weiter grenzen wir um die Ausnahmestelle ein genügend kleines Intervall S' ab (vgl. Fig. 1), für das

$$\int_{S'} |f|\, d\sigma < \frac{\varepsilon}{8A} \tag{4}$$

gilt; sodann wird noch, unter S'_δ das zu S' entsprechende, durch die Normalen in den Endpunkten ausgeschnittene Stück der Parallelkurve S_δ verstanden, ein $\delta_2 > 0$ so gewählt, daß für alle $\delta < \delta_2$

$$\left| \int_{S_\delta - S'_\delta} \left| \frac{\partial u_1}{\partial n} \right| d\sigma_\delta - \int_{S-S'} |f|\, d\sigma \right|, \quad \left| \int_{S_\delta - S'_\delta} \left| \frac{\partial u_2}{\partial n} \right| d\sigma_\delta - \int_{S-S'} |f|\, d\sigma \right| < \frac{\varepsilon}{8A} \tag{5}$$

ausfällt. Dann ist wegen (3), (4) und (5)

$$\int_{S'_\delta} \left| \frac{\partial u_1}{\partial n} \right| d\sigma_\delta = \int_{S_\delta} \left| \frac{\partial u_1}{\partial n} \right| d\sigma_\delta - \int_S |f|\, d\sigma - \int_{S_\delta - S'_\delta} \left| \frac{\partial u_1}{\partial n} \right| d\sigma_\delta + \int_{S-S'} |f|\, d\sigma + \int_{S'} |f|\, d\sigma < \frac{3\varepsilon}{8A}, \quad \int_{S'_\delta} \left| \frac{\partial u_2}{\partial n} \right| d\sigma_\delta < \frac{3\varepsilon}{8A}. \tag{6}$$

Ist noch für alle $\delta < \delta_3$

$$\int_{S_\delta - S'_\delta} \left| \frac{\partial v}{\partial n} \right| d\sigma_\delta < \frac{\varepsilon}{4A},$$

so bekommen wir wegen

$$\int_{S_\delta} \left| \frac{\partial v}{\partial n} \right| d\sigma_\delta = \int_{S'_\delta} + \int_{S_\delta - S'_\delta} \leqq \int_{S'_\delta} \left(\left| \frac{\partial u_1}{\partial n} \right| + \left| \frac{\partial u_2}{\partial n} \right| \right) d\sigma_\delta + \int_{S_\delta - S'_\delta} \left| \frac{\partial v}{\partial n} \right| d\sigma_\delta \tag{7}$$

mit Rücksicht auf (2) schließlich

$$\left| \int_{S_\delta} v \frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma_\delta \right| < \varepsilon, \qquad (\delta < \operatorname{Min}(\delta_1, \delta_2, \delta_3)), \tag{8}$$

woraus unter Beachtung der auf T_δ angewendeten Greenschen Formel

$$\int_T \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \right\} d\tau = \lim_{\delta \to 0} \int_{T_\delta} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \right\} d\tau_\delta = 0 \tag{9}$$

($d\tau$, $d\tau_\delta$ die Volumenelemente in T, T_δ)

folgt; damit ist die Einzigkeit bewiesen [12]).

[12]) Die Anwendung von Parallelkurven bei Behandlung der Greenschen Formeln, allerdings für durchweg stetige Normalableitung auf dem Rande, findet sich meines Wissens zuerst bei A. Liapounoff, Journ. de Math. (5) 4 (1898), S. 241—311.

b) *Dritte Randwertaufgabe.*

Wie in IIa) sei wieder der Bereich $T + S$ vorgelegt und auf S eine absolut integrierbare Funktion $f(\sigma)$ gegeben, die an endlich vielen Stellen nicht beschränkt zu sein braucht, im übrigen aber stetig ist und in jedem abgeschlossenen Stetigkeitsintervall gleichmäßig einer L-Bedingung genügt; ferner möge auf S noch eine weitere, dort durchweg stetige und nirgends positive Funktion $h(\sigma)$ erklärt sein ($h \not\equiv 0$). Wir betrachten wieder für $\delta < \delta_0$ die Schar der Parallelflächen S_δ und erklären auf jeder von diesen eine Funktion $h_\delta(\sigma_\delta)$ durch die Festsetzung, daß in zusammengehörigen (d. h. auf der gleichen Normalen zu S liegenden) Punkten

$$h_\delta(\sigma_\delta) = h(\sigma) \tag{10}$$

sein soll. Nunmehr gilt der

Unitätssatz. Es gibt höchstens eine in T reguläre, in $T + S$ dem Absolutbetrag nach beschränkte Lösung der Gleichung $\Delta u = 0$, die so beschaffen ist, daß bei Annäherung an jedes abgeschlossene Stetigkeitsintervall von f auf S $\dfrac{\partial u}{\partial n} + h_\delta u$ gleichmäßig gegen den Wert $f(\sigma)$ konvergiert und daß

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{S_\delta} \left| \frac{\partial u}{\partial n} + h_\delta u \right| d\sigma_\delta = \int_S |f(\sigma)|\, d\sigma \tag{11}$$

gilt[13]).

[13]) Die Existenz des Grenzwertes (11) ist z. B. gesichert, wenn

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{S_\delta} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| d\sigma_\delta = \int_S \left| \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_S \right| d\sigma \quad \text{und} \quad \lim_{\delta \to 0} \int_{S_\delta} |u|\, d\sigma_\delta = \int_S |(u)_S|\, d\sigma \tag{11a}$$

ist, unter $\left(\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)_S$ bzw. $(u)_S$ die Grenzwerte von $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ bzw. u bei Annäherung an S verstanden, die in allen abgeschlossenen Stetigkeitsintervallen von $f(\sigma)$ gleichmäßig existieren und über S absolut integrierbar sein sollen. Man erkennt nämlich wie in IIa, daß sich $\int_{S'_\delta} \left| \dfrac{\partial u}{\partial n} \right| d\sigma_\delta$ und $\int_{S'_\delta} |u|\, d\sigma_\delta$ gleichmäßig für alle $\delta < \bar{\delta}$ beliebig klein machen lassen. Hieraus ergibt sich aber wegen

$$\int_{S_\delta} \left| \frac{\partial u}{\partial n} + h_\delta u \right| d\sigma_\delta - \int_S |f(\sigma)|\, d\sigma$$

$$= \int_{S'_\delta} \left| \frac{\partial u}{\partial n} + h_\delta u \right| d\sigma_\delta + \int_{S_\delta - S'_\delta} \left| \frac{\partial u}{\partial n} + h_\delta u \right| d\sigma_\delta - \int_{S - S'} |f(\sigma)|\, d\sigma - \int_{S'} |f(\sigma)|\, d\sigma$$

leicht die Gültigkeit von (11).

Beweis. In der Bezeichnungsweise von IIa) findet sich für genügend kleines δ, etwa $\delta < \delta_4$, entsprechend

$$(12) \qquad \int_{S'_\delta} \frac{\partial u_1}{\partial n} + h_\delta u_1 \, d\sigma_\delta, \quad \int_{S'_\delta} \left| \frac{\partial u_2}{\partial n} + h_\delta u_2 \right| d\sigma_\delta < \frac{3\varepsilon}{8A}.$$

Es sei jetzt δ_5 so klein gewählt, daß für alle $\delta < \delta_5$ mit $v = u_1 - u_2$

$$(13) \qquad \int_{S_\delta - S'_\delta} \left| \frac{\partial v}{\partial n} + h_\delta v \right| d\sigma_\delta < \frac{\varepsilon}{4A}$$

ausfällt; somit ist

$$(14) \qquad \int_{S_\delta} \left| \frac{\partial v}{\partial n} + h_\delta v \right| d\sigma_\delta < \frac{\varepsilon}{A}$$

und also mit $|v| < A$

$$(15) \qquad \int_{S_\delta} |v| \left| \frac{\partial v}{\partial n} + h_\delta v \right| d\sigma_\delta < \varepsilon, \qquad (\delta < \mathrm{Min}\,(\delta_4, \delta_5)).$$

Hieraus ergibt sich

$$(16) \qquad \left| \int_{T_\delta} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \right\} d\tau_\delta - \int_{S_\delta} h_\delta v^2 \, d\sigma_\delta \right| = \left| \int_{S_\delta} v \left(\frac{\partial v}{\partial n} + h_\delta v \right) d\sigma \right| < \varepsilon$$

und daher wegen $h_\delta \leqq 0$

$$(17) \qquad \int_T \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \right\} d\tau = \lim_{\delta \to 0} \int_{T_\delta} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \right\} d\tau_\delta = 0,$$

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{S_\delta} h_\delta v^2 \, d\sigma_\delta = 0,$$

woraus die Behauptung folgt.

c) Anwendung auf das Potential der einfachen Schicht. Erweiterungen.

Aus den Untersuchungen von Carleman[14]) erkennt man leicht, daß die als Potential der einfachen Schicht dargestellte Lösung die unter a) und b) gestellten Forderungen erfüllt. Bezeichnet nämlich $U(x, y, z) = \int_S \mu'(\sigma) \frac{1}{r} d\sigma$

[14]) Vgl. l. c. [2]), insbesondere S. 2ff., Gleichung (2) und (5), wobei die dortigen Betrachtungen sogar für Gebiete mit Kanten (in der Ebene mit Ecken) gelten.

dieses Potential, wobei nach Plemelj $\mu'(\sigma)$ die gleichen Eigenschaften wie $f(\sigma)$ aufweist, so ist in unserer Bezeichnungsweise für hinreichend kleine δ, etwa $\delta < \delta^*$,

$$\int_{S'_\delta} \left|\frac{\partial U}{\partial n}\right| d\sigma_\delta < \varepsilon, \qquad \int_{S'_\delta} |U|\, d\sigma_\delta < \varepsilon.$$

Hieraus folgt sogleich, daß die Voraussetzung (1) bzw. die in Fußnote [13]) erwähnten Forderungen (11a) und somit auch (11) erfüllt sind. Da ferner f und also auch μ' in jedem abgeschlossenen Stetigkeitsintervall gleichmäßig einer L-Bedingung genügen, so sind $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ beim Übergang auf ein solches Randintervall stetig[15]). Das Potential der einfachen Schicht ist also die einzige Lösung des Problems.

Es sei noch bemerkt, daß die Betrachtungen natürlich in gleicher Weise in der Ebene gelten, ferner auch im Raume für Gebiete mit Kanten, in der Ebene für Gebiete mit Ecken. In diesem Fall müssen die Betrachtungen, ähnlich wie bei Carleman [l. c. [2])] durchgeführt werden; insbesondere ist es zweckmäßig, die Definition der Parallelflächen bzw. -kurven jetzt wie dort zu modifizieren. Ebenso gelten auch die Unitätssätze bei dem entsprechenden Problem für das Außengebiet von S, wenn man Regularität (im Plemeljschen Sinne) im Unendlichen verlangt, da dann ja auch die Greenschen Formeln für T_δ gelten. — Besitzt schließlich beim dritten Randwertproblem die Funktion h eine endliche Anzahl von Unendlichkeitsstellen σ_ν, in deren Umgebung sie gleichmäßig Ungleichungen der Form $|h(\sigma)| < \frac{\text{konst}}{r_{\sigma\sigma_\nu}^{\lambda'}}$ $(0 < \lambda' < 1$, $r_{\sigma\sigma_\nu}$ Abstand der Punkte σ und σ_ν) genügt, so lassen sich die Betrachtungen ebenfalls ohne Mühe übertragen. Insbesondere genügt auch jetzt das Potential der einfachen Schicht den Voraussetzungen[16]).

---

[15]) Vgl. z. B. L. Lichtenstein, Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung. Enzykl. d. math. Wiss., Bd. II 3, S. 177—377, insbes. S. 201; die dort aufgeführten Sätze gelten auch im Innern von Kurven- bzw. Flächenstücken. Dann sind auch [vgl. Fußnote [11])] die Voraussetzungen über die Konvergenz von $\frac{\partial u}{\partial n}$ bei Annäherung an S erfüllt.

[16]) An Stelle der 2. Bedingung in (11a) [Fußnote [11])] ist jetzt

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{S_\delta} |h_\delta|\, |u|\, d\sigma_\delta = \int_S |h|\, |u|\, d\sigma$$

zu setzen. Es sei noch bemerkt, daß die Lösungsexistenz beim Außenproblem der dritten Randwertaufgabe die stückweise Stetigkeit von h verlangt. Vgl. l. c. 2a), wo dies gezeigt wird.

III. Einzigkeit in der Ebene mit Hilfe der konjugierten Potentialfunktion.

a) Die zweite Randwertaufgabe.

Es werde in der Ebene (x, y) ein endliches oder unendliches, von einer einzigen geschlossenen, stetig gekrümmten JORDANschen Kurve S begrenztes Gebiet T betrachtet[13a]); die Punkte von S sind durch ihre, von einem festen Punkt aus gemessene Bogenlänge s gekennzeichnet. Auf S sei eine, abgesehen von endlich vielen Stellen s_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$, an denen sie nicht notwendig beschränkt zu sein braucht, stetige Funktion $f(s)$ gegeben, die in jedem abgeschlossenen, solche Stellen nicht enthaltenden Teilintervall gleichmäßig einer L-Bedingung genügt und die in der Umgebung einer jeden Ausnahmestelle s_ν eine Ungleichung der Form

$$|f(s)| < \frac{C}{|s - s_\nu|^\lambda} \tag{18}$$

$(0 < \lambda < 1$, konstant; C konstant, wie später $C_1, C_2, \ldots)$

befriedigt. Wird weiter $\int_S f(s)\,ds = 0$ vorausgesetzt, so gilt für das zweite Randwertproblem der folgende

Unitätssatz. Es gibt (bis auf eine additive Konstante) höchstens eine in T reguläre, in $T + S$ stetige Lösung u der Gleichung $\Delta u = 0$, deren Normalableitung $\frac{\partial u}{\partial n}$ bei Annäherung an jedes abgeschlossene Stetigkeitsintervall von f gleichmäßig gegen die Wertefolge $f(s)$ konvergiert, wenn noch verlangt wird, daß u auf S, als Funktion von s betrachtet, gleichmäßig einer L-Bedingung genügt und daß, falls T nicht beschränkt ist, für $R \to \infty$

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} = O\left(\frac{1}{R^{1+\tau}}\right) \quad (R^2 = x^2 + y^2;\ \tau > 0, \text{konstant})$$

gilt[17]).

Bevor wir dies beweisen, behaupten wir zunächst den

Hilfssatz. Genügt eine in T reguläre, in $T + S$ stetige Potentialfunktion $v(x, y)$ gleichmäßig auf der stetig gekrümmten Kurve S einer Lipschitz-Bedingung mit dem Exponenten ϱ $(0 < \varrho < 1)$, so erfüllt auch die

---

16a) Es können auch, ohne daß die folgenden Betrachtungen wesentlich geändert werden müßten, eine endliche Anzahl von Ecken oder einspringenden Spitzen zugelassen werden, falls im übrigen die Kurvenstücke von S analytisch sind. Hierin ist z. B. der für manche Anwendungen wichtige Spezialfall der längs einer Strecke aufgeschlitzten Ebene enthalten.

17) Die letzte Forderung, die die Existenz von $\lim_{R\to\infty} u$ sicherstellt, geht über die PLEMELJsche Regularitätsdefinition [vgl. l. c.[7]), S. 4] hinaus, nach der für $R \to \infty$ nur $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} = o\left(\frac{1}{R}\right)$ sein soll.

zu v konjugierte Potentialfunktion $\bar{v}(x, y)$ auf S gleichmäßig eine L-Bedingung mit dem gleichen Exponenten ϱ.

Nach Priwaloff [18]) gilt dieser Satz, falls S eine Kreislinie ist; für Bereiche mit stetig gekrümmter Berandung ist er dann leicht zu beweisen:

Bildet nämlich die analytische Funktion $Z(z)$ den endlichen (bzw. unendlichen) Bereich T der Ebene $z = x + iy$ umkehrbar eindeutig und konform auf das Innere (bzw. Äußere) T des Einheitskreises Σ der Ebene $Z = X + iY$ ab, so verhält sich wegen der stetigen Krümmung von S $\frac{dZ}{dz}$ noch auf S stetig und es ist $\frac{dZ}{dz}|$ in $T + S$ beschränkt und von Null verschieden[19]). Genügt daher auf S $v(x, y)$ gleichmäßig einer L-Bedingung mit dem Exponenten ϱ, so gilt das gleiche für $v^*(X, Y) = v[x(X, Y), y(X, Y)]$, also nach Priwaloff auch für die Konjugierte $\bar{v}^*(X, Y)$ und somit schließlich für $\bar{v}(x, y) = \bar{v}^*[X(x, y), Y(x, y)]$[19a]).

Nun der Beweis des Unitätssatzes: Wir führen in bekannter Weise das zweite Randwertproblem auf das erste zurück. Die (bis auf eine additive Konstante festgelegte) konjugierte Potentialfunktion $\bar{u}$ einer jeden Lösung u unserer Randwertaufgabe genügt mit Rücksicht auf den eben bewiesenen Hilfssatz unter den Voraussetzungen des Unitätssatzes auf S gleichmäßig einer L-Bedingung, hat, falls T nicht beschränkt ist, unter unseren Annahmen das gleiche Unendlichkeitsverhalten wie u und muß in allen abgeschlossenen Stetigkeitsintervallen von f auf S wegen $\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial \bar{u}}{\partial s}$ gleichmäßig die Vorgabe

$$\lim_{(x,y)\to s}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial s}\right) = -f(s)$$

erfüllen. Hieraus folgt, daß $\bar{u}(x, y)$ bei Annäherung an S stetig in die [wegen (18) überall existierende], wegen $\int_S f(s)\,ds = 0$ bis auf eine additive Konstante C eindeutige Randfunktion

$$F(s) = -\int_{s^*}^{s} f(t)\,dt \quad (s^* \text{ ein beliebiger fester Punkt auf } S)$$

übergehen muß, die tatsächlich mit Rücksicht auf (18) gleichmäßig auf S einer L-Bedingung mit dem Exponenten $1 - \lambda$ genügt[20]). Hierdurch ist

[18]) I. Priwaloff, Sur les fonctions conjuguées. Bull. soc. math. France 44 (1916), S. 100—103.

[19]) Vgl. l. c. [15]), S. 254.

[19a]) Unter den Annahmen der Fußnote [16a]) wird sich beim Übergang von $v(x, y)$ zu $\bar{v}(x, y)$ im allgemeinen der L-Exponent ändern, ohne zu verschwinden, Vgl. l. c. [15]), S. 255.

[20]) Das erkennt man leicht folgendermaßen: Wegen der in der Nachbarschaft jeder Stelle s_ν gültigen Ungleichheit $|F(s^{(1)}) - F(s^{(2)})| < C\int_{s^{(1)}}^{s^{(2)}} \frac{ds}{|s - s_\nu|^\lambda}$ findet man

(bis auf eine additive Konstante) die in T (gegebenenfalls einschließlich des unendlich fernen Punktes) reguläre Potentialfunktion $\bar{u}(x, y)$ eindeutig festgelegt, woraus sogleich folgt, daß es (ebenfalls bis auf eine additive Konstante) höchstens eine Lösung u der zweiten Randwertaufgabe geben kann, die den Forderungen des Unitätssatzes genügt.

b) Erfüllung der Voraussetzungen des Unitätssatzes.

Aus den Plemeljschen Untersuchungen [l. c. [1])] folgt, daß eine Lösung der zweiten Randwertaufgabe sogar unter der Voraussetzung (18) existiert; sie läßt sich als Potential einer einfachen Schicht darstellen und erfüllt, falls T nicht beschränkt ist, unsere Voraussetzungen über das Verhalten für $R \to \infty$. Wie in IIc) erkennt man wieder, daß sich ihre Ableitungen erster Ordnung beim Übergang auf jedes auf S gelegene Stetigkeitsintervall von f stetig verhalten [vgl. Fußnote [15])].

Wir behaupten, daß diese Lösung, die bis auf eine additive Konstante

$$U(x, y) = \int_S \mu'(t) \log \frac{1}{r}\, dt$$

($t = (x_t, y_t)$ der Integrationspunkt auf S, $r^2 = (x - x_t)^2 + (y - y_t)^2$)

lauten möge, auf S gleichmäßig einer L-Bedingung mit dem Exponenten $1 - \lambda$ genügt und daß somit sämtliche Voraussetzungen des Unitätssatzes erfüllt sind.

Wie Plemelj zeigte, hat $\mu'(s)$ die gleichen Stetigkeitseigenschaften wie $f(s)$; insbesondere gilt also in der Nachbarschaft der s_ν

$$|\mu'(s)| < \frac{C_1}{|s - s_\nu|^\lambda}. \tag{19}$$

---

z. B. für $s^{(1)} < s^{(2)} \leqq s_\nu$: $|F(s^{(1)}) - F(s^{(2)})| < \frac{C}{1-\lambda}[(s_\nu - s^{(1)})^{1-\lambda} - (s_\nu - s^{(2)})^{1-\lambda}]$, und es ist leicht zu sehen (etwa durch Betrachtung der Funktion $\varphi(\eta) = (1-\eta)^{1-\lambda} - (1 - \eta^{1-\lambda})$ mit $\eta = \frac{s^{(2)} - s^{(1)}}{s_\nu - s^{(1)}}$, $0 \leqq \eta \leqq 1$), daß durchweg

$$\frac{(s_\nu - s^{(1)})^{1-\lambda} - (s_\nu - s^{(2)})^{1-\lambda}}{(s^{(2)} - s^{(1)})^{1-\lambda}} \leqq 1$$

ist. Analoges gilt für $s_\nu \leqq s^{(1)} < s^{(2)}$. Ist $s^{(1)} \leqq s_\nu \leqq s^{(2)}$, so gilt wegen $\int_{s^{(1)}}^{s^{(2)}} = \int_{s^{(1)}}^{s_\nu} + \int_{s_\nu}^{s^{(2)}}$ die Abschätzung $|F(s^{(1)}) - F(s^{(2)})| < \frac{C}{1-\lambda}[(s_\nu - s^{(1)})^{1-\lambda} + (s^{(2)} - s_\nu)^{1-\lambda}]$ $\leqq \frac{2C}{1-\lambda}(s^{(2)} - s^{(1)})^{1-\lambda}$.

Die zu U konjugierte Potentialfunktion

$$\overline{U}(x, y) = -\int_S \mu'(t) \operatorname{arctg} \frac{y - y_t}{x - x_t}\, dt + C^* \quad (C^* \text{ eine beliebige Konstante})$$

läßt sich mit $\mu(s) = \int_{\bar{s}}^{s} \mu'(t)\, dt$ [$\bar{s} = (x_{\bar{s}}, y_{\bar{s}})$ ein fester Punkt auf S] und $m = \int_S \mu'(t)\, dt$ [21]) nach einer Integration per partes in der Gestalt [22])

$$(20) \qquad \overline{U}(x, y) = -m \operatorname{arctg} \frac{y - y_{\bar{s}}}{x - x_{\bar{s}}} + \int_S \mu(t) \frac{d}{dt} \left(\operatorname{arctg} \frac{y - y_t}{x - x_t} \right) dt + C^*$$

schreiben. Der Integralausdruck in (20) stellt wegen $\frac{d}{dt}\left(\operatorname{arctg} \frac{y - y_t}{x - x_t}\right) = \frac{d}{dn_t} \log \frac{1}{r}$ das Potential einer Doppelschicht dar. Bei Annäherung des Punktes (x, y) aus T an einem beliebigen Randpunkt $s = (x_s, y_s)$ geht daher $\overline{U}(x, y)$ in den Ausdruck

$$(21) \quad [\overline{U}(x, y)]_{(x,y) \to s} = -m \operatorname{arctg} \frac{y_s - y_{\bar{s}}}{x_s - x_{\bar{s}}} \pm \pi \mu(s) + \int_S \mu(t) \frac{d}{dn_t} \log \frac{1}{r_{st}}\, dt + C^*$$

über, wobei die Normalenrichtung in das Innere des von S umschlossenen beschränkten Bereiches weist und das $+$- oder $-$-Zeichen zu nehmen ist, je nachdem T beschränkt ist oder nicht. Nun gilt wegen (19), wie man leicht [wie in Fußnote [20])] nachprüft, gleichmäßig auf S

$$(22) \qquad |\mu(s^{(1)}) - \mu(s^{(2)})| < C_2 |s^{(1)} - s^{(2)}|^{1-\lambda};$$

weiter ist auf S $\frac{d}{ds}\left(\operatorname{arctg} \frac{y_s - y_{\bar{s}}}{x_s - x_{\bar{s}}}\right)$ außer im Punkte $\bar{s}$ stetig und bleibt bei Annäherung an $\bar{s}$ beschränkt; der Ausdruck $\int_S \mu(t) \frac{d}{dn_t} \log \frac{1}{r_{st}}\, dt$ besitzt aber wegen (22) eine durchweg stetige Ableitung nach s [23]). Alles in allem ist daher mit Rücksicht auf (21) gleichmäßig auf S

$$|[\overline{U}(x, y)]_{(x,y) \to s^{(1)}} - [\overline{U}(x, y)]_{(x,y) \to s^{(2)}}| < C_3 |s^{(1)} - s^{(2)}|^{1-\lambda}.$$

Hieraus folgt nach dem zu Beginn von IIIa angeführten Hilfssatze, daß gleichmäßig auf S auch

$$(23) \qquad |U(s^{(1)}) - U(s^{(2)})| < C_4 |s^{(1)} - s^{(2)}|^{1-\lambda}$$

gilt, wobei zur Abkürzung $[U(x, y)]_{(x,y) \to s^{(1)}} = U(s^{(1)})$, $[U(x, y)]_{(x,y) \to s^{(2)}} = U(s^{(2)})$ gesetzt ist.

---

[21]) Enthält T den unendlich fernen Punkt, so ist $m = 0$.

[22]) Vgl. z. B. J. Plemelj, l. c. [7]), S. 24.

[23]) Vgl. l. c. [15]), S. 205.

Damit ist gezeigt, daß die in Gestalt eines Potentials einer einfachen Schicht darstellbare Plemelj-Lösung der zweiten Randwertaufgabe die Voraussetzungen des Unitätssatzes erfüllt und somit auch die einzige Lösung ist.

c) Die dritte Randwertaufgabe.

Es sei $h(s)$ eine weitere auf S gegebene und, falls es sich im folgenden um das Innenproblem handelt, wie $f(s)$ beschaffene Funktion, für die insbesondere in der Umgebung der Unendlichkeitsstellen $\bar{s}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, m$), die nicht mit den zu $f(s)$ gehörigen s_ν zusammenfallen brauchen, eine zu (18) analoge Ungleichung gilt; beim Außenproblem soll $h(s)$ beschränkt und stückweise stetig sein (vgl. die letzte Bemerkung in Fußnote [16]). Wir nehmen ferner an, daß die homogene Integralgleichung für die Belegungsdichte der als Potential einer einfachen Schicht angesetzten Lösung der dritten Randwertaufgabe keine nichttriviale Lösung hat[24]. Dann haben wir für das dritte Randwertproblem den folgenden

Unitätssatz. Es gibt höchstens eine in T reguläre, in $T + S$ stetige Lösung u der Gleichung $\Delta u = 0$, die auf S an allen Stetigkeitsstellen von f und h der Bedingung $\frac{\partial u}{\partial n} + h(s)\, u = f(s)$ genügt, falls noch verlangt wird, daß $\frac{\partial u}{\partial n}$ bei Annäherung an jedes auf S gelegene abgeschlossene Stetigkeitsintervall von f und h gleichmäßig konvergiert, daß ferner u auf S gleichmäßig einer L-Bedingung genügt und daß, wenn T nicht beschränkt ist, für $R \to \infty$ $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} = O\left(\frac{1}{R^{1+\tau}}\right)$ ($R^2 = x^2 + y^2$, $\tau > 0$, konstant) gilt.

Beweis. Wegen der Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -h(s)\, u + f(s)$$

geht bei Annäherung an jedes abgeschlossene, keine der s_ν und $\bar{s}_\nu$ enthaltende Teilintervall $\frac{\partial u}{\partial n}$ gleichmäßig gegen eine dort gleichmäßig einer L-Bedingung genügende Randfunktion, für die in der Nachbarschaft der s_ν und $\bar{s}_\nu$ eine zu (18) analoge Ungleichung gilt.

Gäbe es nun mehrere, den Voraussetzungen des Unitätssatzes genügende Lösungen des dritten Randwertproblems, so müßte sich eine jede, wie unter III a und III b gezeigt wurde, notwendig in der Gestalt

$$u(x, y) = \int_S \mu'(t) \log \frac{1}{r}\, dt + N \qquad (N \text{ konstant}) \tag{24}$$

darstellen lassen.

---

[24]) Das ist z. B. gewiß für stetiges $h \leqq 0$ ($h \not\equiv 0$) der Fall, falls es auf S keine Belegung $\varkappa(s)$ gibt, derart, daß $\int_S \varkappa(t) \log \frac{1}{r}\, dt$ identisch in T verschwindet.

Ist T beschränkt, so läßt sich bekanntlich die Konstante N als Potential einer einfachen Schicht schreiben; hieraus folgt, daß sich auch $u(x, y)$ insgesamt als Potential einer einfachen Schicht darstellen lassen muß. Unter unseren Voraussetzungen zeigt aber die Theorie der linearen Integralgleichungen[25]), daß es genau ein einziges solches, der Randbedingung genügendes Potential gibt, womit in diesem Fall die Einzigkeit bewiesen ist.

Ist T nicht beschränkt, so folgt aus der Existenz einer und nur einer Lösung von der Gestalt (24), für die überdies $\int_S \mu'(t)\,dt = 0$ ist[26]), und aus der Zwangsläufigkeit dieser Darstellung, daß auch diese Lösung im Rahmen unserer Voraussetzungen die einzige ist.

IV. Ein zweiter Beweis für das in IIIb dargestellte Verhalten eines Potentials der einfachen Schicht auf der belegten Kurve.

Im folgenden wird ein zweiter Beweis[27]) dafür gegeben, daß unter der Annahme, daß $\mu'(s)$ in einer gewissen Umgebung der Stellen s_ν,

$$|s - s_\nu| \leqq D_1,$$

gleichmäßig für alle ν einer Ungleichung der Form

$$\mu'(s) < \frac{C_1}{|s - s_\nu|^\lambda} \tag{25}$$

genügt, die Funktion

$$U(x, y) = \int_S \mu'(t) \log \frac{1}{r}\, dt$$

auf S gleichmäßig eine L-Bedingung befriedigt. Obwohl sich jetzt für den L-Exponenten ein kleinerer Wert als $1 - \lambda$ ergibt, ist die folgende Betrachtung doch nützlich, da sie sich ohne Mühe auf den Raum übertragen läßt, was natürlich auf dem in III b beschrittenen Wege unmöglich ist.

Wir betrachten den Ausdruck

$$U(s^{(1)}) - U(s^{(2)}) = \int_S \mu'(t) \left(\log \frac{1}{r_1} - \log \frac{1}{r_2} \right) dt, \tag{26}$$

$$r_1^2 = (x_1 - x_t)^2 + (y_1 - y_t)^2, \qquad r_2^2 = (x_2 - x_t)^2 + (y_2 - y_t)^2,$$

[25]) Vgl. J. Plemelj, l. c.[1]), S. 199 f.

[26]) Vgl. hierzu l. c.[2a]), wo der Existenzbeweis durchgeführt wird.

[27]) Wir bedienen uns hier einer ähnlichen Methode, wie sie Korn im Falle beschränkter Belegung anwendete. Vgl. A. Korn, Lehrbuch der Potentialtheorie, Bd. 1, Berlin 1899, S. 388 f.; ferner: Untersuchungen zur allgemeinen Theorie der Potentiale von Flächen und Räumen. Sitz.ber. d. math.-phys. Klasse der Bayer. Akad. d. Wiss. **36** (1906), S. 3–36.

unter $s^{(1)} = (x_1, y_1)$ und $s^{(2)} = (x_2, y_2)$ zwei feste Punkte auf S mit dem Abstand $d_{12} = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ und unter (x_t, y_t) den Integrationspunkt t verstanden.

Es sei $2\,D_2$ der kleinste, längs S gemessene Abstand zwischen zwei Unendlichkeitsstellen s_ν; innerhalb des Intervalls

$$|s - s_\nu| \leqq D_2 \tag{27}$$

liegt daher keine weitere Ausnahmestelle.

Es sei weiter $B > 1$ eine feste Konstante. Dann definieren wir eine Zahl $\delta_0 = \delta_0(B)$ wie folgt: Für alle Punktepaare σ_1 und σ_2 auf S, deren geradliniger Abstand δ_{12} der Ungleichung

$$\delta_{12} < \delta_0 \tag{28}$$

genügt, bestehe (man beachte die stetige Krümmung von S) zwischen der absolut kleinsten Bogenlängendifferenz $\sigma_2 - \sigma_1$ und δ_{12} gleichmäßig die Ungleichung

$$1 \leqq \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{\delta_{12}} \leqq B. \tag{29}$$

Insbesondere befinden sich die Punktepaare, deren Bogenlängendifferenzen der Ungleichung

$$|\sigma_1 - \sigma_2| < \delta_0 \tag{30}$$

genügen, unter den Punktepaaren (28).

Ist jetzt

$$D = \operatorname{Min}(D_1, D_2, \tfrac{1}{2}\delta_0), \tag{31}$$

so liegt in dem Intervall $|s - s_\nu| \leqq D$ keine weitere Ausnahmestelle; ferner gilt dort (25) und (29).

Wir betrachten weiter alle auf S gelegenen Punktepaare $(s^{(1)}, s^{(2)})$, deren geradlinige Abstände d_{12} der Beschränkung

$$d_{12} \leqq \frac{D}{4\,B} \tag{32}$$

genügen. Wegen (29) und $\frac{D}{4\,B} \leqq \frac{\delta_0}{8}$ gilt für diese gewiß

$$|s^{(1)} - s^{(2)}| \leqq \frac{D}{4}. \tag{33}$$

Jetzt werde um den Halbierungspunkt von d_{12} ein Kreis K mit dem Radius

$$\mathsf{P} = a\,d_{12}^{\bar{\lambda}} \qquad (0 < \bar{\lambda} < 1, \text{ konstant}) \tag{34}$$

geschlagen; setzen wir die Konstante

$$a = \left(\frac{D}{4\,B}\right)^{1-\bar{\lambda}}, \tag{35}$$

so ist für die durch (32) erfaßten Punktepaare der Durchmesser von K

$$2\,\mathsf{P} < \frac{D}{2\,B}.$$

Wegen $\frac{D}{2\,B} \leqq \frac{\delta_0}{4}$ ist (29) auf den durch K ausgeschnittenen Bogen S^* (σ', σ'') (vgl. Fig. 2) und auf die zugehörige Sehne anwendbar, und es ergibt sich

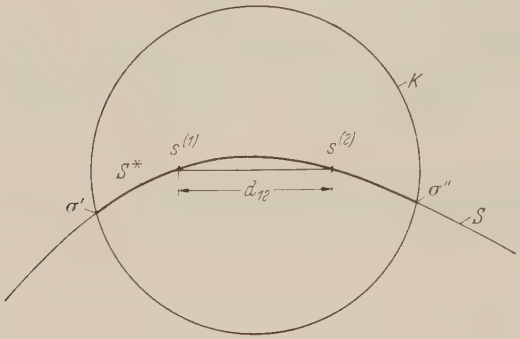

Fig. 2.

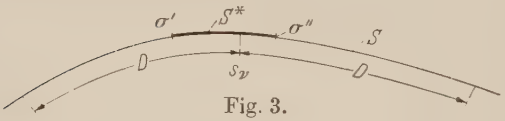

Fig. 3.

$$(36)\quad |\sigma' - \sigma''| \leqq \frac{D}{2\,B} \cdot B = \frac{D}{2}.$$

Für die Punktepaare mit (32) ist wegen $\mathsf{P} = \left(\frac{D}{4\,B\,d_{12}}\right)^{1-\bar{\lambda}} d_{12}$

$$(37)\qquad \mathsf{P} \geqq d_{12},$$

d. h. die Punkte $s^{(1)}$, $s^{(2)}$ liegen im Innern von K.

Auf dem von K ausgeschnittenen Bogen S^* liege jetzt (vgl. Fig. 3) eine der Unendlichkeitsstellen s_ν; wegen (36) ist diese gewiß die einzige. Dann gilt zunächst wegen (26) mit Rücksicht auf (25) und (29)

$$(38)\quad \left|\int_{S^*} \mu'(t)\left(\log\frac{1}{r_1} - \log\frac{1}{r_2}\right) dt\right| < C_5 \int_{S^*} \frac{1}{|t-s_\nu|^\lambda}\left(\frac{1}{|t-s^{(1)}|^\vartheta} + \frac{1}{|t-s^{(2)}|^\vartheta}\right) dt, \quad (\vartheta \text{ beliebig in } 0 < \vartheta < 1-\lambda).$$

Es bezeichne S_1^* den Teil von S^*, für dessen mit t bezeichnete Punkte $|t - s_\nu| \leqq |t - s^{(1)}|$, S_2^* den Teil, für den $|t - s_\nu| > |t - s^{(1)}|$ gilt. Dann ist wegen (29) und (34)

$$(39)\quad \int_{S^*} \frac{1}{|t-s_\nu|^\lambda} \cdot \frac{1}{|t-s_1^{(1)}|^\vartheta}\, dt = \int_{S_1^*} + \int_{S_2^*} \leqq \int_{S^*} \frac{dt}{|t-s_\nu|^{\lambda+\vartheta}} + \int_{S^*} \frac{dt}{|t-s^{(1)}|^{\lambda+\vartheta}}$$

$$< C_6\,\mathsf{P}^{1-\lambda-\vartheta} < C_7\, d_{12}^{\bar{\lambda}(1-\lambda-\vartheta)}.$$

Eine entsprechende Ungleichung gilt für $\int_{S^*} \frac{1}{|t-s_\nu|^\lambda} \cdot \frac{1}{|t-s^{(2)}|^\vartheta}\, dt$.

Liegt weiter s_ν zwar nicht auf S^*, ist aber die Bogenlänge zwischen s_ν und dem nächstgelegenen Endpunkte σ' oder σ'' von S^* kleiner als $\frac{1}{2} D$ (gilt also $|t - s_\nu| < \frac{1}{2} D$ für alle t auf S^*) (vgl. Fig. 4), so liegt S^* noch in dem Intervall $|s - s_\nu| \leqq D$, und man gelangt durch eine völlig analoge Betrachtung ebenfalls zu zwei Ungleichungen der Form (39), indem man $|t - s_\nu| \geqq |t - \sigma'|$ bzw. $\geqq |t - \sigma''|$ beachtet. — Liegt schließlich kein Ausnahmepunkt s_ν auf S^* und in der eben genannten Nachbarschaft mit der Bogenlänge $\frac{1}{2} D$, so ist μ' auf S^* gleichmäßig für jede Lage dieses Flächenstückes mit $|t - s_\nu| \geqq \frac{1}{2} D$ für alle t auf S beschränkt. Für die linke Seite von (38) finden sich jetzt erst recht entsprechende Ungleichungen und wir bekommen, alles in allem,

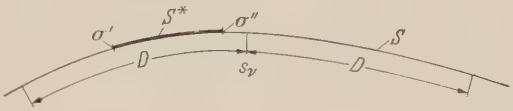

Fig. 4.

$$\left| \int_{S^*} \mu'(t) \left(\log \frac{1}{r_1} - \log \frac{1}{r_2} \right) dt \right| < C_8 \, d_{12}^{\bar{\lambda}(1-\lambda-\vartheta)} ; \tag{40}$$

dabei ist C_8 eine von der Lage der Punkte $s^{(1)}$ und $s^{(2)}$ und von d_{12} unabhängige Konstante, vorausgesetzt, daß d_{12} der Ungleichung (32) genügt.

Der kleinstmögliche Abstand $r_{\min}$ der Punkte $s^{(1)}$ oder $s^{(2)}$ von der Kreislinie K ist mit Rücksicht auf (37) und (34)

$$r_{\min} = \mathsf{P} - \frac{d_{12}}{2} \geqq \frac{\mathsf{P}}{2} = C_9 \, d_{12}^{\bar{\lambda}} \text{ [28]}. \tag{41}$$

Für jede Lage des Integrationspunktes $(x_t, y_t) = t$ auf $S - S^*$ ist somit für $d_{12} \leqq \frac{D}{4B}$

$$\left| \log \frac{1}{r_1} - \log \frac{1}{r_2} \right| < C_{10} \frac{d_{12}}{r_{\min}} < C_{11} \, d_{12}^{1-\bar{\lambda}}, \tag{42}$$

und es gilt daher

$$\left| \int_{S-S^*} \mu'(t) \left(\log \frac{1}{r_1} - \log \frac{1}{r_2} \right) dt \right| < C_{12} d_{12}^{1-\bar{\lambda}} \int_S |\mu'(t)| \, dt = C_{13} d_{12}^{1-\bar{\lambda}}. \tag{43}$$

Wird jetzt noch

$$\text{Min} \left[1 - \bar{\lambda}, \, \bar{\lambda} (1 - \lambda - \vartheta) \right] = \lambda^* \qquad (0 < \lambda^* < 1) \tag{44}$$

gesetzt, so folgt aus (40) und (43) schließlich

$$\left| \int_S \mu'(t) \left(\log \frac{1}{r_1} - \log \frac{1}{r_2} \right) dt \right| < C_{14} \, d_{12}^{\lambda^*}. \tag{45}$$

Dies gilt zunächst gleichmäßig für alle Punktepaare, die die Ungleichung (32) erfüllen; bei geeigneter Wahl von C_{14} gilt (45) schließlich ganz allgemein.

[28]) Im räumlichen Falle ist von jetzt ab $0 < \bar{\lambda} < \frac{1}{2}$ anzunehmen.

(Eingegangen am 13. Dezember 1941.)

Eine Ungleichung für Vektorlängen.

Von

Hans Hornich in Wien.

In dieser Arbeit soll eine weitgehende Verallgemeinerung der Dreiecksungleichung gezeigt werden, die trotz ihrer Einfachheit und Allgemeinheit nicht bekannt zu sein scheint. Ihr hier gegebener Beweis erfordert einige Umwege und Hilfssätze.

Sind $\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n$, $\mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_m$ *beliebige* $n + m$ *Vektoren mit* $m \geqq 1$ *und mit*

$$\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i = \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{b}_j \tag{1}$$

und ist $\mathfrak{c}$ *ein Einheitsvektor eines* R_k, *so gilt die folgende Ungleichung*:

$$\sum_{i=1}^{n} (|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{a}_i|) \leqq \sum_{j=1}^{m} (|\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{b}_j|) + n + m - 2. \tag{2}$$

Als einfachster Spezialfall ergibt sich für $m = 1$ und $n = 2$ mit drei beliebigen Vektoren $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ die Ungleichung:

$$|\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}| + |\mathfrak{c}| + |\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}| \geqq |\mathfrak{a} + \mathfrak{b}| + |\mathfrak{b} + \mathfrak{c}| + |\mathfrak{c} + \mathfrak{a}|,$$

welche wieder die Dreiecksungleichung als Spezialfall enthält.

Zum Beweis von (2) setzen wir

$$\sum_{i=1}^{n} |\mathfrak{a}_i| + \sum_{j=1}^{m} |\mathfrak{b}_j| = R$$

und zeigen den Hilfssatz:

Es ist gleichmäßig für alle $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_j$, welche (1) erfüllen:

$$\limsup_{R \to \infty} \Big(\sum_{i=1}^{n} (|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{a}_i|) - \sum_{j=1}^{m} (|\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{b}_j|) \Big) \leqq n + m - 2. \tag{3}$$

Zunächst ist:

$$|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{a}_i| = \frac{2\,\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{c} + 1}{|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}| + |\mathfrak{a}_i|}$$

und analog für die $\mathfrak{b}_j$, so daß wir (3) auch schreiben können:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2\,\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{c} + 1}{|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}| + |\mathfrak{a}_i|} - \sum_{j=1}^{m} \frac{2\,\mathfrak{b}_j\,\mathfrak{c} + 1}{|\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}| + |\mathfrak{b}_j|} \leqq m + n - 2 + o(1) \tag{4}$$

Wir betrachten zunächst den Fall, daß für ein festes $R > 0$ alle $|\mathfrak{a}_i|$ und $|\mathfrak{b}_j| > \frac{R}{2(m+n)}$ sind. Dann können wir $|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}| = |\mathfrak{a}_i|\,(1 + \varepsilon_i)$ setzen,

wo ε_i absolut unterhalb einer nur von R abhängigen und mit $R \to \infty$ gegen Null strebenden Schranke liegt; analoges gilt für die $|\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}|$. Es ist also:

$$5) \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{2\,\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{c}+1}{|\mathfrak{a}_i+\mathfrak{c}|+|\mathfrak{a}_i|} - \sum_{j=1}^{m} \frac{2\,\mathfrak{b}_j\,\mathfrak{c}+1}{|\mathfrak{b}_j+\mathfrak{c}|+|\mathfrak{b}_j|} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{c}}{|\mathfrak{a}_i|} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\mathfrak{b}_j\,\mathfrak{c}}{|\mathfrak{b}_j|} + o(1).$$

$$\leqq \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathfrak{a}_i}{|\mathfrak{a}_i|} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\mathfrak{b}_j}{|\mathfrak{b}_j|} \right| + o(1).$$

Wir bestimmen nun das Maximum der Größe $\left| \sum_{i=1}^{m+n} \mathfrak{e}_i \right|$, wo die $\mathfrak{e}_i$ Einheitsvektoren sind und eine Relation

$$\sum_{i=1}^{m+n} \alpha_i \mathfrak{e}_i = 0$$

mit $\alpha_i \geqq 0$ bestehen soll. Sei etwa $\alpha_1 = \operatorname{Max}_i \alpha_i = 1$; dann ist:

$$\left| \sum_{i=1}^{n+m} \mathfrak{e}_i \right| = \left| \sum_{i=2}^{n+m} (1-\alpha_i)\,\mathfrak{e}_i \right| \leqq \sum_{i=2}^{n+m} (1-\alpha_i);$$

wegen $\mathfrak{e}_1 = -\sum_{i=2}^{n+m} \alpha_i \mathfrak{e}_i$ ist aber $\sum_{i=2}^{n+m} \alpha_i \geqq 1$ und $\left| \sum_{i=1}^{n+m} \mathfrak{e}_i \right| \leqq n+m-2$. Diese Zahl ist natürlich auch das Maximum.

Es ist also stets:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathfrak{a}_i}{|\mathfrak{a}_i|} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\mathfrak{b}_j}{|\mathfrak{b}_j|} \right| \leqq n+m-2,$$

und da alle $|\mathfrak{a}_i|,\ |\mathfrak{b}_j| > \frac{R}{2\,(m+n)}$ sind, so ist

$$6) \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{2\,\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{c}+1}{|\mathfrak{a}_i+\mathfrak{c}|+|\mathfrak{a}_i|} - \sum_{j=1}^{m} \frac{2\,\mathfrak{b}_j\,\mathfrak{c}+1}{|\mathfrak{b}_j+\mathfrak{c}|+|\mathfrak{b}_j|} \leqq n+m-2+o(1).$$

Seien nun einige der $|\mathfrak{a}_i| \leqq \frac{R}{2\,(m+n)}$; es muß stets eines der $|\mathfrak{a}_i|$ oder eines der $|\mathfrak{b}_j| > \frac{R}{2\,(m+n)}$ sein. Wir beachten weiter, daß für ein λ mit $0 \leqq \lambda \leqq 1$ und einem beliebigen Vektor $\mathfrak{a}$ gilt:

$$\frac{(\mathfrak{a}-\lambda\,\mathfrak{c})\,\mathfrak{c}}{|\mathfrak{a}-\lambda\,\mathfrak{c}|} \leqq \frac{(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})\,\mathfrak{c}+\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}}{|\mathfrak{a}+\mathfrak{c}|+|\mathfrak{a}|} \leqq \frac{(\mathfrak{a}+\mathfrak{c}+\lambda\,\mathfrak{c})\,\mathfrak{c}}{|\mathfrak{a}+\mathfrak{c}+\lambda\,\mathfrak{c}|}.$$

Für alle $|\mathfrak{a}_i| \leqq \frac{R}{2\,(m+n)}$ ersetzen wir $\frac{2\,\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{c}+1}{|\mathfrak{a}_i+\mathfrak{c}|+|\mathfrak{a}_i|}$ auf der linken Seite von (4) durch die größeren Werte $\frac{(\mathfrak{a}_i+\mathfrak{c}+\lambda\,\mathfrak{c})\,\mathfrak{c}}{|\mathfrak{a}_i+\mathfrak{c}+\lambda\,\mathfrak{c}|}$; es seien deren etwa insgesamt n'. Ist nun ein Glied $|\mathfrak{a}_i|$, etwa $|\mathfrak{a}_n| > \frac{R}{2\,(m+n)}$, so ersetzen wir das entsprechende Glied auf der linken Seite von (4) durch $\frac{(\mathfrak{a}_n-n'\,\mathfrak{c}-n'\,\lambda\,\mathfrak{c})\,\mathfrak{c}}{|\mathfrak{a}_n-n'\,\mathfrak{c}-n'\,\lambda\,\mathfrak{c}|}$, was für dieses Glied

nur eine Änderung $o(1)$ — und zwar gleichmäßig für alle $\mathfrak{a}_i$ — ergibt. Gibt es aber kein Glied $|\mathfrak{a}_i| > \frac{R}{2(m+n)}$, so muß es ein $\mathfrak{b}_j$, etwa $|\mathfrak{b}_m| > \frac{R}{2(m+n)}$ geben; dann ersetzen wir das entsprechende Glied auf der linken Seite von (4) durch $\frac{(\mathfrak{b}_m + n'\mathfrak{c} + n'\lambda\mathfrak{c})\mathfrak{c}}{|\mathfrak{b}_m + n'\mathfrak{c} + n'\lambda\mathfrak{c}|}$, was für dieses Glied wieder nur eine Änderung $o(1)$ bedeutet.

Analog ist mit den $\mathfrak{b}_j$ zu verfahren, für welche $|\mathfrak{b}_j| \leqq \frac{R}{2(m+n)}$ ist: wir ersetzen $\frac{2\mathfrak{b}_j\mathfrak{c}+1}{|\mathfrak{b}_j+\mathfrak{c}|+|\mathfrak{b}_j|}$ auf der linken Seite von (4) durch die kleineren Werte $\frac{(\mathfrak{b}_j - \lambda\mathfrak{c})\mathfrak{c}}{|\mathfrak{b}_j - \lambda\mathfrak{c}|}$; es seien derer etwa m'. Gibt es ein $\mathfrak{b}_j$ mit $|\mathfrak{b}_j| > \frac{R}{2(m+n)}$, so ersetzen wir das entsprechende Glied auf der linken Seite von (4) durch $\frac{(\mathfrak{b}_j + m'\lambda\mathfrak{c})\mathfrak{c}}{|\mathfrak{b}_j + m'\lambda\mathfrak{c}|}$, was für dieses Glied nur eine Änderung $o(1)$ ergibt. Gibt es aber kein $|\mathfrak{b}_j| > \frac{R}{2(m+n)}$, so gibt es ein $|\mathfrak{a}_i| > \frac{R}{2(m+n)}$ und wir ersetzen das entsprechende Glied auf der linken Seite von (4) durch $\frac{(\mathfrak{a}_i - m'\lambda\mathfrak{c})\mathfrak{c}}{|\mathfrak{a}_i - m'\lambda\mathfrak{c}|}$, was wieder nur eine Änderung $o(1)$ gibt.

Für die so abgeänderte und — abgesehen von Größen $o(1)$ — vergrößerte linke Seite von (4) ist dieselbe Überlegung wie oben anzuwenden: es ist dann wieder

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2\mathfrak{a}_i\mathfrak{c}+1}{|\mathfrak{a}_i+\mathfrak{c}|+|\mathfrak{a}_i|} - \sum_{j=1}^{m} \frac{2\mathfrak{b}_j\mathfrak{c}+1}{|\mathfrak{b}_j+\mathfrak{c}|+|\mathfrak{b}_j|} \leqq m+n-2+o(1).$$

Damit ist (3) vollständig nachgewiesen.

Dem weiteren Beweis von (2) schicken wir folgende Bemerkung voraus: Wir können für diesen Beweis alle Vektoren $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_j$, $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c} \neq 0$ voraussetzen. Ist ein $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c} = 0$ oder ein $\mathfrak{b}_j = 0$, so reduziert sich (2) auf eine Summe von Dreiecksungleichungen. Die beiden anderen Fälle erledigen sich durch Rekursion:

Ist ein $\mathfrak{a}_i = 0$, so kommt man auf den Fall von $m + n - 1$ Vektoren, indem man den betreffenden $\mathfrak{a}$-Vektor streicht.

Ist ein $\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c} = 0$, etwa $\mathfrak{b}_m = -\mathfrak{c}$, so lassen wir das Glied mit $\mathfrak{b}_m$ fort, und da dadurch $\Sigma\mathfrak{b}_j$ um $\mathfrak{c}$ vermehrt wird, fügen wir zu den $\mathfrak{a}$-Vektoren noch $\mathfrak{a}_{n+1} = \mathfrak{c}$ hinzu; die Gesamtzahl der $\mathfrak{a}$- und $\mathfrak{b}$-Vektoren bleibt $m + n$. Es ist dann:

$$\sum_{i=1}^{n+1}(|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{a}_i|) - \sum_{j=1}^{m-1}(|\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{b}_j|)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}(|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{a}_i|) - \sum_{j=1}^{m}(|\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{b}_j|).$$

Es bleibt dann noch der Fall, daß alle m $\mathfrak{b}$-Vektoren $= -\mathfrak{c}$ sind. Führt man den angegebenen Vorgang m-mal durch, so erhalten wir die zu beweisende Ungleichung:

$$\sum_{i=1}^{n+m} (|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{a}_i|) \leqq n + m - 2,$$

wo $\sum_{i=1}^{n+m} \mathfrak{a}_i = 0$ und $\mathfrak{a}_{n+m} = \mathfrak{c}$ ist.

Es ist dann $\mathfrak{a}_{n+m-1} = -\mathfrak{c} - \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2 - \cdots - \mathfrak{a}_{n+m-2}$ und die zu beweisende Ungleichung:

$$\sum_{i=1}^{n+m-2} (|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{a}_i|) - (|\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_{n+m-2} + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_{n+m-2}|) \leqq n + m - 3,$$

also die Ungleichung (2) mit einem $\mathfrak{b}$- und $n + m - 2$ $\mathfrak{a}$-Vektoren.

Für $n + m = 2$ ist die Ungleichung (2) ohne weiteres zu verifizieren; sonst wird an keiner Stelle des Beweises Rekursion verwendet. Wir können daher fortan die Ungleichung (2) für die genannten Fälle als bewiesen annehmen.

Aus unserer Ungleichung (3) ergibt sich:

Soll die Funktion

$$f(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_j) = \sum_{i=1}^{n} (|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{a}_i|) - \sum_{j=1}^{m} (|\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{b}_j|)$$

auch Werte $> m + n - 2$ annehmen, so müßten auch Extremwerte $> m + n - 2$ auftreten; wir gehen also daran, die Extreme von $f(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_j)$ aufzusuchen. Wir ersetzen dabei $\mathfrak{b}_m = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i - \sum_{j=1}^{m-1} \mathfrak{b}_j$; wir bemerken ferner, daß mit Ausnahme der Stellen, an denen einer der Vektoren $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}_j$, $\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}$ verschwindet, f stets differenzierbar ist; in den ausgeschlossenen Fällen konnten wir (2) als bewiesen annehmen.

Für die Extreme von f gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_i} = \frac{\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}}{|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}|} - \frac{\mathfrak{a}_i}{|\mathfrak{a}_i|} - \frac{\mathfrak{b}_m + \mathfrak{c}}{|\mathfrak{b}_m + \mathfrak{c}|} + \frac{\mathfrak{b}_m}{|\mathfrak{b}_m|} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$-\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{b}_j} = \frac{\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}}{|\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}|} - \frac{\mathfrak{b}_i}{|\mathfrak{b}_j|} - \frac{\mathfrak{b}_m + \mathfrak{c}}{|\mathfrak{b}_m + \mathfrak{c}|} + \frac{\mathfrak{b}_m}{|\mathfrak{b}_m|} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m - 1)$$

oder es ist für $i = 1 \ldots n$, $j = 1 \ldots m$:

$$\frac{\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}}{|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}|} - \frac{\mathfrak{a}_i}{|\mathfrak{a}_i|} = \frac{\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}}{|\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}|} - \frac{\mathfrak{b}_j}{|\mathfrak{b}_j|} = \mathfrak{A}. \tag{7}$$

Wir können annehmen, daß für höchstens einen der $\mathfrak{a}$- und $\mathfrak{b}$-Vektoren

$$|\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}| = |\mathfrak{a}_i| \quad \text{bzw.} \quad |\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}| = |\mathfrak{b}_j| \tag{8}$$

gilt: andernfalls folgte (2) schon aus Dreiecksungleichungen. Gibt es einen

$\mathfrak{a}$- oder $\mathfrak{b}$-Vektor, für den (8) gilt, so ist der Vektor $\mathfrak{A} = \mathfrak{c} \cdot \alpha$ ($\alpha \neq 0$) und alle $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_j$, für welche (8) nicht gilt, sind linear von $\mathfrak{c}$ abhängig: unter den Vektoren $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_j$ sind also höchstens zwei linear unabhängig. Gibt es endlich keinen Vektor, für den (8) gilt, so sind alle Vektoren $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_j$ linear aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{c}$ zusammenzusetzen.

Die Vektoren $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_j$ liegen also auf einer ebenen Vektormannigfaltigkeit $\mathfrak{E}$. Bezeichnet man mit $(\mathfrak{v}, \mathfrak{w})$ den orientierten Winkel zweier Vektoren $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ aus $\mathfrak{E}$, so folgt mit einem beliebigen Vektor $\mathfrak{e} \neq 0$ aus $\mathfrak{E}$ aus (7):

$$\begin{aligned} &\sin \frac{(\mathfrak{a}_i+\mathfrak{c},\mathfrak{e})+(\mathfrak{a}_i,\mathfrak{e})}{2} \sin \frac{(\mathfrak{a}_i+\mathfrak{c},\mathfrak{e})-(\mathfrak{a}_i,\mathfrak{e})}{2} \\ &= \sin \frac{(\mathfrak{b}_j+\mathfrak{c},\mathfrak{e})+(\mathfrak{b}_j,\mathfrak{e})}{2} \sin \frac{(\mathfrak{b}_j+\mathfrak{c},\mathfrak{e})-(\mathfrak{b}_j,\mathfrak{e})}{2}. \end{aligned} \tag{9}$$

Denkt man sich den Vektor $\mathfrak{e}$ um $\frac{\pi}{2}$ gedreht, quadriert und addiert die so entstehenden Gleichungen (9), so wird für alle i und j:

$$\sin^2 \frac{(\mathfrak{a}_i+\mathfrak{c},\mathfrak{e})-(\mathfrak{a}_i,\mathfrak{e})}{2} = \sin^2 \frac{(\mathfrak{b}_j+\mathfrak{c},\mathfrak{e})-(\mathfrak{b}_j,\mathfrak{e})}{2} = \varrho. \tag{10}$$

Ist $\varrho = 0$, so ist $(\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}, \mathfrak{e}) - (\mathfrak{a}_i \mathfrak{e}) = (\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}, \mathfrak{a}_i) \equiv 0\ (2\pi)$, also alle $\mathfrak{a}_i$ und ebenso alle $\mathfrak{b}_j$ sind linear von $\mathfrak{c}$ abhängig: dieser Fall wird am Ende des Beweises behandelt.

Ist $\varrho \neq 0$, so folgt aus (9) weiter:

$$\sin [(\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}, \mathfrak{e}) + (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{e})] = \sin [(\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}, \mathfrak{e}) + (\mathfrak{b}_j, \mathfrak{e})] \tag{11}$$

und wegen der Willkür von $\mathfrak{e}$:

$$(\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}, \mathfrak{e}) + (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{e}) \equiv (\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}, \mathfrak{e}) + (\mathfrak{b}_j, \mathfrak{e})\ (2\pi). \tag{12}$$

Aus (10) folgt wieder entweder

$$(\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}, \mathfrak{e}) - (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{e}) \equiv (\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}, \mathfrak{e}) - (\mathfrak{b}_j, \mathfrak{e})\ (2\pi) \tag{13 a}$$

oder

$$(\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}, \mathfrak{e}) - (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{e}) \equiv (\mathfrak{b}_j, \mathfrak{e}) - (\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}, \mathfrak{e})\ (2\pi). \tag{13 b}$$

Aus (12) und (13a) folgt

$$\begin{aligned} (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{e}) &\equiv (\mathfrak{b}_j, \mathfrak{e})\ (\pi), \\ (\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}, \mathfrak{e}) &\equiv (\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}, \mathfrak{e})\ (\pi). \end{aligned}$$

Es sind also $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_j$ linear abhängig und ebenso $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}$. Dann ist entweder $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{b}_j$ oder es sind sowohl $\mathfrak{a}_i$ als $\mathfrak{b}_j$ linear von $\mathfrak{c}$ abhängig. Den ersteren Fall können wir gleich ausscheiden, da dann (2) sofort aus Dreiecksungleichungen folgt.

Aus (12) und (13b) folgt

$$\begin{aligned} (\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}, \mathfrak{e}) &\equiv (\mathfrak{b}_j, \mathfrak{e})\ (\pi), \\ (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{e}) &\equiv (\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}, \mathfrak{e})\ (\pi). \end{aligned}$$

Es sind also $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}_j$ linear abhängig und ebenso $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}$. Dann sind entweder sowohl $\mathfrak{a}_i$ als $\mathfrak{b}_j$ von $\mathfrak{c}$ linear abhängig, oder wenn weder $\mathfrak{a}_i$ noch $\mathfrak{b}_j$ linear von $\mathfrak{c}$ abhängen, muß $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{b}_j + \mathfrak{c} = 0$ gelten. Wir zeigen, daß dieser letztere Fall nicht eintreten kann, sondern daß alle $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_j$ linear von $\mathfrak{c}$ abhängig sein müssen. Wäre etwa $\mathfrak{a}_1$ nicht von $\mathfrak{c}$ linear abhängig, so müßte, und zwar mit jedem $\mathfrak{b}_j$ gelten: $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_j + \mathfrak{c} = 0$, d. h. alle $\mathfrak{b}_j$ wären einander gleich und nicht von $\mathfrak{c}$ linear abhängig; dann müßten aber auch wieder alle $\mathfrak{a}_i$ der Gleichung genügen $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{b}_j + \mathfrak{c} = 0$ und ebenfalls alle $\mathfrak{a}_i$ einander gleich und nicht von $\mathfrak{c}$ linear abhängig sein. Es wäre aber dann:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i = \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{b}_j = n\mathfrak{a}_1 = m\mathfrak{b}_1.$$

Weiter müßte gelten $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{c} = 0$, also $\mathfrak{a}_1 = -\frac{m}{m+n}\mathfrak{c}$, also $\mathfrak{a}_1$ entgegen der Voraussetzung von $\mathfrak{c}$ linear abhängig.

Es ist also schließlich nur der Fall zu untersuchen, daß alle $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_j$ linear von $\mathfrak{c}$ abhängig sind.

Sei also $\mathfrak{a}_i = \alpha_i\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}_j = \beta_j\mathfrak{c}$; dann ist die Ungleichung zu zeigen:

$$\sum_{i=1}^{n} (|\alpha_i + 1| - |\alpha_i|) - \sum_{j=1}^{m} (|\beta_j + 1| - |\beta_j|) \leqq n + m - 2,$$

wo also die α_i und β_j beliebige reelle Zahlen mit $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} \beta_j$ und $m \geqq 1$ sei.

Wir zerlegen die n Zahlen α_i in drei Klassen: mit α_i' bezeichnen wir die Zahlen α_i mit $\alpha_i' > 0$, mit α_i'' die mit $-1 \leqq \alpha_i'' \leq 0$ und mit α_i''' die mit $\alpha_i''' < -1$; die Anzahlen der α_i in diesen drei Kla sen seien n', n'', n''', also $n' + n'' + n''' = n$. Analog zerlegen wir die m Zahlen β_j; deren Anzahlen seien m', m'', m''' und $m' + m'' + m''' = m$. Je nachdem α_i der ersten, zweiten oder dritten Klasse angehört, ist dann $|\alpha_i + 1| - |\alpha_i| = 1$, $1 - 2|\alpha_i''|$, -1; ebenso für die β_j.

Die zu beweisende Ungleichung hat dann die folgende Gestalt:

$$-\Sigma|\alpha_i''| + \Sigma|\beta_i''| \leqq n''' + m' + m'' - 1.$$

Wegen $\Sigma|\beta_i''| \leqq m''$ ist diese Ungleichung sicher erfüllt, wenn n''' oder $m' > 0$ sind. Wir nehmen also weiterhin $n''' = m' = 0$ an und hätten dann zu zeigen:

$$\Sigma|\beta_i''| \leqq \Sigma|\alpha_i''| + m'' - 1.$$

Nun ist

$$-\Sigma|\beta_i''| + \Sigma\beta_i''' = \Sigma\alpha' - \Sigma|\alpha_i''|,$$

also ist zu zeigen

$$-\Sigma\alpha_i' + \Sigma\beta_i''' \leqq m'' - 1;$$

wäre nun

$$-\Sigma\alpha_i' + \Sigma\beta_i''' > m'' - 1,$$

so müßte, weil links eine Zahl $\leqq 0$ steht, $m'' = 0$ sein und weiter

$$|-\Sigma \alpha_i' + \Sigma \beta_i'''| < 1$$

und

$$\Sigma |\beta_i'''| < 1$$

und wegen $|\beta_i'''| > 1$ ist auch $m''' = 0$. Also wäre $m = m' + m'' + m''' = 0$ entgegen unserer Voraussetzung.

Bemerkenswert ist die Voraussetzung $m \geqq 1$, während die Anzahl der $\mathfrak{a}$-Vektoren nicht beschränkt ist.

Für den Spezialfall $m = 1$, $n = 2$ hat Herr Hlawka mir einen rein algebraischen Beweis angegeben:

Es ist, wenn man die Relation

$$|\mathfrak{a}|^2 + |\mathfrak{b}|^2 + |\mathfrak{c}|^2 + |\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}|^2 = |\mathfrak{a} + \mathfrak{b}|^2 + |\mathfrak{b} + \mathfrak{c}|^2 + |\mathfrak{c} + \mathfrak{a}|^2$$

berücksichtigt:

$$\begin{aligned} &|\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}| + |\mathfrak{c}| - |\mathfrak{a} + \mathfrak{b}| - |\mathfrak{b} + \mathfrak{c}| - |\mathfrak{c} + \mathfrak{a}| + |\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}| \\ &\quad = (|\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}| - |\mathfrak{a} + \mathfrak{b}|)\left(1 - \frac{|\mathfrak{a}|+|\mathfrak{b}|+|\mathfrak{a}+\mathfrak{b}|}{|\mathfrak{a}|+|\mathfrak{b}|+|\mathfrak{c}|+|\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}|}\right) \\ &\quad + (|\mathfrak{b}| + |\mathfrak{c}| - |\mathfrak{b} + \mathfrak{c}|)\left(1 - \frac{|\mathfrak{b}|+|\mathfrak{c}|+|\mathfrak{b}+\mathfrak{c}|}{|\mathfrak{a}|+|\mathfrak{b}|+|\mathfrak{c}|+|\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}|}\right) \\ &\quad + (|\mathfrak{c}| + |\mathfrak{a}| - |\mathfrak{c} + \mathfrak{a}|)\left(1 - \frac{|\mathfrak{c}|+|\mathfrak{a}|+|\mathfrak{c}+\mathfrak{a}|}{|\mathfrak{a}|+|\mathfrak{b}|+|\mathfrak{c}|+|\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}|}\right) \geqq 0. \end{aligned}$$

Wir geben schließlich noch einige Ungleichungen, die sich als Spezialfälle von (2) ergeben.

Für $m = 2$, $n = 1$ ist mit drei willkürlichen Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$:

$$|\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}| - |\mathfrak{c}| + |\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}| \leqq |\mathfrak{a} + \mathfrak{b}| + |\mathfrak{b} + \mathfrak{c}| + |\mathfrak{c} + \mathfrak{a}|.$$

Für $m = 3$, $n = 0$ ist:

$$|\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}| + |\mathfrak{a} + \mathfrak{b}| \leqq |\mathfrak{a} + \mathfrak{c}| + |\mathfrak{b} + \mathfrak{c}| + |\mathfrak{a} + \mathfrak{b} - \mathfrak{c}| + |\mathfrak{c}|.$$

Für beliebige Vektoren $\mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_m$ und $\mathfrak{c}$ gilt ($n = 1$):

$$\sum_{j=1}^{m} |\mathfrak{b}_j| - \left|\sum_{j=1}^{m} \mathfrak{b}_j\right| \leqq \sum_{j=1}^{m} |\mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}| - \left|\sum_{j=1}^{m} \mathfrak{b}_j + \mathfrak{c}\right| + (m-1)\,|\mathfrak{c}|.$$

(Eingegangen am 9. Februar 1942.)

Über gewisse Halbverbände und kommutative Semigruppen.

Erster Teil.

Von

Fritz Klein-Barmen in Wuppertal.

Einleitung.

Ein *Halbverband* in bezug auf eine Verknüpfung $\circ$ kann nicht zugleich eine kommutative *Semigruppe* in bezug auf $\circ$ sein, wenn man von dem belanglosen Fall absieht, daß nur ein einziges Element vorhanden ist. Die Gleichung

$$a \circ x = a$$

hat nämlich, wenn der Operationsbereich ein Halbverband ist, im allgemeinen mehrere Lösungen, dagegen höchstens eine Lösung, wenn es sich um eine Semigruppe handelt. Noch viel weniger kann natürlich ein *Verband* zu einer Semigruppe ausgebaut werden, wenn dabei verlangt wird, daß die Semigruppenverknüpfung zugleich eine der beiden Verbandsverknüpfungen sein soll.

Andererseits stimmen aber Halbverband und kommutative Semigruppe in ihrer Konstitution weitgehend überein. Beide Bereiche haben in dem weiterhin als *Holoid* bezeichneten Operationsbereich ihr gemeinsames Fundament. Eine wichtige Etappe auf dem Wege zum Holoid bildet das *Assoziativ*. In der vorliegenden Arbeit entwickeln und untersuchen wir die in Assoziativ und Holoid verankerte Begriffswelt. Eine besonders bedeutsame Klasse von Holoiden soll Gegenstand einer weiteren Arbeit sein.

§ 1.

Assoziativ und Holoid.

1. Grundgegebenheit sei eine von der Nullmenge verschiedene, im übrigen endliche oder unendliche Menge M, deren Elemente einer durch $\circ$ symbolisierten *Verknüpfung* fähig sind. Die Verknüpfung werde durch die folgenden *Axiome* näher bestimmt:

A I. Sind a, b zwei beliebige Elemente aus M, so gibt es in M ein Element c derart, daß gilt

$$a \circ b = c.$$

A II. Für drei beliebige Elemente a, b, c aus M gilt

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

A III. Für zwei beliebige Elemente a, b aus M gilt

$$a \circ b = b \circ a.$$

Erklärung 1. Eine Menge M mit einer den Axiomen A I und A II genügenden Elementverknüpfung $\circ$ heiße ein *Assoziativ*[1]) in bezug auf $\circ$. Ist überdies A III in Kraft, so sprechen wir von einem *kommutativen* Assoziativ. Ein Assoziativ werde als *endlich* oder *unendlich* bezeichnet, je nachdem es aus endlich oder unendlich vielen Elementen besteht. Unter der *Ordnung* eines endlichen Assoziativs werde die Anzahl der verschiedenen Elemente verstanden, aus denen das Assoziativ besteht.

Da wir es im allgemeinen nur mit einer einzigen Elementverknüpfung zu tun haben, können keine Mißverständnisse entstehen, wenn an Stelle von $a \circ b$ einfach ab geschrieben wird. Wir machen in dieser Arbeit von beiden Schreibweisen Gebrauch.

Weiterhin sei M ein kommutatives Assoziativ.

Aus A I und A II folgt, daß für $n \geqq 1$ das „Produkt"

$$\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu = a_1 \ldots a_n$$

existiert. Dasselbe geht, wenn insbesondere

$$a_\nu = a \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

ist, in die „Potenz" a^n über.

Ohne auf den Beweis einzugehen, merken wir den folgenden Satz an, der besagt, daß in M die gewöhnlichen Potenzregeln in Kraft sind:

Satz 1. *Sind m, n positive ganze Zahlen, so gilt für beliebige Elemente a, b aus M*

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad a^m b^m = (ab)^m.$$

Erklärung 2. Ein Element e aus M heiße ein *ausgezeichnetes Element erster Art*, wenn für jedes Element a aus M

$$a \circ e = a$$

[1]) Die Bezeichnung „Assoziativ" für derartige Bereiche habe ich in [A. V. 4], S. 87 vorgeschlagen. — In das Literaturverzeichnis am Schluß der jetzigen Arbeit habe ich auch einige neuere Untersuchungen aufgenommen, die im Zusammenhang mit der Theorie der Verbände stehen, ohne daß in ihnen das in der vorliegenden Arbeit behandelte Problem unmittelbar berührt wird.

gilt. Ferner heiße ein Element f aus M ein *ausgezeichnetes Element zweiter Art*, wenn für jedes Element a aus M

$$a \circ f = f$$

gilt.

Satz 2. *Es gibt in M höchstens ein ausgezeichnetes Element erster Art und höchstens ein ausgezeichnetes Element zweiter Art.*

Beweis. Sind e und e' ausgezeichnete Elemente erster Art, so gilt

$$e'e = e', \quad ee' = e,$$

woraus nach A III die Identität von e und e' folgt. Entsprechend beweist man den zweiten Teil der Behauptung.

Dagegen reichen die bisherigen Axiome nicht zur Sicherung der *Existenz* der ausgezeichneten Elemente aus. So gibt es sowohl kommutative Assoziative mit einem ausgezeichneten Element erster Art als auch solche ohne ein derartiges Element; ebenso gibt es sowohl kommutative Assoziative mit einem ausgezeichneten Element zweiter Art als auch solche ohne ein derartiges Element. Beispiele zeigen, daß alle vier durch Kombination sich ergebenden Fälle realisiert werden können.

2. Wir engen den Begriff des kommutativen Assoziativs dadurch ein, daß wir auf M zwei weitere *Axiome* einwirken lassen:

A IV. Es gibt in M ein ausgezeichnetes Element erster Art.

A V. Sind a, b und x, y Elemente aus M derart, daß

$$a = b \circ x, \quad b = a \circ y$$

gilt, so ist

$$a = b.$$

Erklärung 3. Ein kommutatives Assoziativ in bezug auf $\circ$, das den Axiomen A IV und A V genügt, heiße ein *Holoid*[2]) in bezug auf $\circ$. Das nach Satz 2 eindeutig bestimmte ausgezeichnete Element erster Art werde stets mit e bezeichnet.

Das Axiom A V hat zur Folge, daß ein Holoid in bezug auf $\circ$ nicht zugleich eine *Gruppe* in bezug auf $\circ$ sein kann, wenigstens keine solche, die aus mehr als einem Element besteht. Wäre M nämlich eine Gruppe in bezug auf $\circ$, so müßte es zu zwei verschiedenen Elementen a, b zwei Elemente x, y geben derart, daß

$$a = bx, \quad b = ay$$

gilt, was im Widerspruch zu A V steht.

---

[2]) Zur Verhütung von Mißverständnissen mache ich darauf aufmerksam, daß der „holoide Bereich" von J. KÖNIG kein Holoid im Sinne der jetzigen Erklärung 3 ist; vgl. KÖNIG [1], S. 7.

Dagegen kann ein Holoid in bezug auf $\circ$ sehr wohl auch eine *Semigruppe* in bezug auf $\circ$ sein; wir gehen darauf in § 5 genauer ein.

Hinsichtlich der *endlichen* Holoide macht der folgende Satz eine bemerkenswerte Feststellung, wobei noch zu erwähnen ist, daß bei dem Beweis desselben das Axiom A IV nicht in Aktion tritt.

Satz 3. *Jedes endliche Holoid besitzt ein ausgezeichnetes Element zweiter Art.*

Beweis. Es sei M ein endliches Holoid von der Ordnung m. Die Behauptung ist für $m = 1$ richtig; also werde $m > 1$ angenommen. Sind

$$a_1, \ldots, a_m$$

die verschiedenen Elemente von M, so existiert das durch

$$f = a_1 \ldots a_m \tag{1}$$

bestimmte Element f und infolgedessen auch für jedes a_μ das durch

$$a'_\mu = f a_\mu \tag{2}$$

bestimmte Element a'_μ. Weiter gibt es für jedes a'_μ ein Element b'_μ derart, daß

$$f = a'_\mu b'_\mu \tag{3}$$

gilt; man erhält b'_μ dadurch, daß man auf der rechten Seite von (1) das Element a'_μ isoliert und die übrigen Elemente zu einem einzigen Element zusammenfaßt. Aus (2) und (3) folgt nach A V

$$a'_\mu = f \qquad (\mu = 1, \ldots, m),$$

so daß f wegen (2) das ausgezeichnete Element zweiter Art ist.

Was die *unendlichen* Holoide anbetrifft, so kann man sowohl solche mit einem ausgezeichneten Element zweiter Art als auch solche ohne ein derartiges Element konstruieren.

§ 2.

Die Beziehung $\supseteq$.

Für ein eingehenderes Studium der Holoide reicht die *verknüpfungstheoretische* Betrachtungsweise, so wertvoll sie auch ist, allein nicht aus. Einen tieferen Einblick in die Feinstruktur der Holoide gewinnt man erst, wenn die *beziehungstheoretische*[3]) Betrachtungsweise hinzukommt. Die wichtigste Beziehung ist, unter M weiterhin ein Holoid verstanden, die in der folgenden Erklärung beschriebene Relation $\supseteq$:

[3]) Das Wort „Beziehung" ist hier in engerer Bedeutung gebraucht; es ist darunter eine *zweigliedrige* Beziehung zu verstehen.

Erklärung 4. Sind a, b Elemente aus M, so sei dann und nur dann

$$a \supseteq b,$$

wenn es in M wenigstens ein Element x gibt derart, daß

$$a = b \circ x$$

gilt. Mit $a \supseteq b$ sei $b \subseteq a$ gleichbedeutend. Findet $a \supseteq b$ statt, so heiße a ein *Oberelement* von b und umgekehrt b ein *Unterelement* von a.

Die besondere Bedeutung der Beziehung $\supseteq$ beruht darauf, daß vermöge derselben der Begriff des Holoids rein beziehungstheoretisch aufgebaut werden kann, worauf wir aber in der vorliegenden Arbeit nicht weiter eingehen.

Satz 4. 1. *Mit*

$$a \supseteq b, \quad b \supseteq c$$

gilt

$$a \supseteq c.$$

Beweis. Aus

$$a = bx, \quad b = cy$$

folgt

$$a = cyx.$$

Satz 4. 2. *Für jedes a gilt*

$$a \supseteq a, \quad a \supseteq e$$

und, falls das ausgezeichnete Element zweiter Art[4]) *existiert, auch*

$$f \supseteq a.$$

Beweis: Axiom A IV und Erklärung 2.

Satz 4. 3. *Mit*

$$a \supseteq b, \quad b \supseteq a$$

gilt

$$a = b.$$

Beweis: Axiom A V.

Diese drei Sätze besagen, daß M eine in bezug auf die Beziehung $\supseteq$ *teilweise geordnete* Menge ist. Insbesondere gibt uns der Satz 4. 2 die Berechtigung, e auch als die *untere Spitze* oder das *unterste Element* von M und entsprechend f — vorausgesetzt, daß f existiert — als die *obere Spitze* oder das *oberste Element* von M zu bezeichnen. Hinzuzufügen ist noch, daß bei einer rein beziehungstheoretischen Begründung des Holoidbegriffes — in der vorliegenden Arbeit handelt es sich um eine Axiomatisierung, die im wesentlichen verknüpfungstheoretischer Natur ist — die drei letzten Sätze zu Axiomen erhoben werden.

[4]) Dieses Element werde immer mit f bezeichnet, es sei denn, daß einmal eine andere Bezeichnung zweckmäßiger ist.

Satz 5. *Sind*

$$a_1, \ldots, a_n \tag{4}$$

Elemente aus M *derart, daß*

$$\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu = e$$

gilt, so ist

$$a_\nu = e \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt $e \supseteq a_\nu$, woraus sich die Behauptung nach den Sätzen 4. 2 und 4. 3 ergibt.

Satz 6. *Zu vorgegebenen Elementen* (4) *gibt es mindestens ein Element* x *derart, daß gilt*

$$x \supseteq a_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Beweis. Das Produkt der Elemente (4) hat die gewünschte Eigenschaft.

Ohne weiteres leuchtet die Richtigkeit der beiden folgenden Sätze ein:

Satz 7. 1. *Mit*

$$a_\nu \supseteq b_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

gilt

$$\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu \supseteq \prod_{\nu=1}^{n} b_\nu.$$

Satz 7. 2. *Für* $n \geqq k$ *gilt*

$$\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu \supseteq \prod_{\varkappa=1}^{k} a_\varkappa.$$

Mit $a \supseteq b$ ist sowohl $a = b$ als auch $a \neq b$ verträglich. Im zweiten Fall kann man eine weitere *Beziehung* einführen:

Erklärung 5. Daß

$$a \supseteq b, \quad a \neq b$$

stattfindet, werde auch durch

$$a \supset b$$

zum Ausdruck gebracht. Mit $a \supset b$ sei $b \subset a$ gleichbedeutend.

Der Satz 4. 1 kann nun leicht folgendermaßen verschärft werden:

Satz 8. *Mit*

$$a \supset b, \quad b \supseteq c \quad bzw. \quad a \supseteq b, \quad b \supset c$$

gilt

$$a \supset c.$$

Erklärung 6. Es seien a, b Elemente aus M derart, daß $a \supset b$ gilt. Gibt es in M kein Element x derart, daß

$$a \supset x, \quad x \supset b$$

gilt, so heiße a ein *oberer Nachbar* von b und umgekehrt b ein *unterer Nachbar* von a.

Satz 9. *Ist M endlich und sind a, b Elemente aus M derart, daß $a \supset b$ gilt, so hat a mindestens einen unteren Nachbarn und b mindestens einen oberen Nachbarn.*

Beweis. Aus Symmetriegründen genügt es, den ersten Teil der Behauptung zu beweisen. Ist b selbst ein unterer Nachbar von a, so ist die Behauptung richtig. Ist b kein unterer Nachbar von a, so gibt es ein Element b_1 derart, daß

$$a \supset b_1, \quad b_1 \supset b$$

gilt. Wir können also $a \supset b$ durch $a \supset b_1$ ersetzen und wie vorher schließen. Das damit eingeleitete Verfahren liefert eine endliche Folge von Elementen

$$b, b_1, b_2, \ldots.$$

Wegen

$$b \subset b_1 \subset b_2 \subset \cdots$$

bricht diese Folge mit einem Element b_r ab, das sich leicht als ein unterer Nachbar von a erweist.

Es ist zu beachten, daß der letzte Satz nur unter gewissen Einschränkungen auf *unendliche* Holoide ausgedehnt werden kann.

§ 3.

Die Beziehung $\perp$.

Auf der im vorhergehenden Paragraphen geschaffenen Basis führen wir eine weitere wichtige Holoidbeziehung ein:

Erklärung 7. Sind a, b Elemente aus M derart, daß das System

$$a \supseteq x, \quad b \supseteq x$$

nur die sicher vorhandene Lösung $x = e$ besitzt, so mögen a und b *fremd* zueinander heißen. Daß a und b fremd zueinander sind, werde durch $a \perp b$ ausgedrückt.

Satz 10. 1. *Mit $a \perp b$ gilt $b \perp a$.*

Satz 10. 2. *Für jedes a gilt $a \perp e$.*

Satz 11. *Sind a, b und a', b' Elemente aus M derart, daß*

$$a \perp b, \quad a \supseteq a', \quad b \supseteq b'$$

gilt, so ist auch

$$a' \perp b'.$$

Beweis. Die Behauptung sei falsch. Dann gibt es ein Element x derart, daß

$$a' \supseteq x, \quad b' \supseteq x, \quad x \neq e$$

gilt, woraus nach Satz 4. 1

$$a \supseteq x, \quad b \supseteq x$$

folgt, was der Voraussetzung widerspricht.

Satz 12. 1. *Mit*

$$a \supseteq b, \quad a \perp b$$

gilt

$$b = e.$$

Beweis. Andernfalls hätte das System

$$a \supseteq x, \quad b \supseteq x$$

die von e verschiedene Lösung $x = b$.

Satz 12. 2. *Mit*

$$a = b, \quad a \perp b$$

gilt

$$a = b = e.$$

Beweis: Satz 12. 1.

Satz 13. 1. *Sind die n Elemente*

$$a_1, \ldots, a_n \qquad (n \geqq 2)$$

zu je zweien fremd und ist

$$c = a_1 \ldots a_n,$$

so gilt mit

(5) $$a_\nu \neq e \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

für alle a_ν

(6) $$a_\nu \neq c.$$

Beweis. Wäre die Behauptung falsch und fände etwa $a_1 = c$ statt, so wäre

$$a_1 = a_1 \ldots a_n,$$

also

$$a_1 \supseteq a_\nu,$$

was für $\nu \neq 1$ wegen

$$a_1 \perp a_\nu, \quad a_\nu \neq e$$

nach Satz 12. 1 unmöglich ist.

Wie der folgende Satz zeigt, läßt sich der Satz 13. 1 für $n = 2$ umkehren.

Satz 13. 2. *Sind die beiden Elemente a, b zueinander fremd und ist $c = ab$, so gilt mit*

$$a \neq c, \quad b \neq c$$

auch

$$a \neq e, \quad b \neq e.$$

Beweis. Wäre die Behauptung falsch und fände etwa $a = e$ statt, so wäre

$$c = eb = b.$$

Dagegen läßt sich der Satz 13. 1 — das bestätigt das folgende Beispiel — für $n > 2$ nicht mehr umkehren. Die Elemente

$$a_1, \ldots, a_n \qquad (n > 2)$$

seien zu je zweien fremd; es sei

$$c = a_1 \ldots a_n.$$

Weiter sei

$$a_1 \neq e, \quad a_2 \neq e,$$

aber

$$a_3 = \cdots = a_n = e,$$

so daß (5) nicht durchweg in Kraft ist. Trotzdem hat (6) Gültigkeit, wie sich folgendermaßen ergibt. Wegen

$$c \supseteq a_1 \supset e$$

und Satz 8 gilt

$$c \supset e, \quad \text{also} \quad c \neq e,$$

so daß

$$c \neq a_3, \ldots, c \neq a_n$$

ist. Wegen

$$a_1 \perp a_2, \quad c = a_1 a_2, \quad a_1 \neq e, \quad a_2 \neq e$$

ist ferner nach Satz 13. 1

$$c \neq a_1, \quad c \neq a_2.$$

Erklärung 8. Sind die Elemente

$$a_1, \ldots, a_n \qquad (n \geqq 2) \tag{7}$$

zu je zweien fremd und sämtlich von e verschieden, so heiße (7) ein $\mathfrak{F}$-*System*[5]. Gilt überdies

$$a_1 \ldots a_n = a,$$

so heiße (7) ein $\mathfrak{F}$-*System für* a.

Zwei $\mathfrak{F}$-Systeme, die sich nur in der Reihenfolge der konstituierenden Elemente unterscheiden, sollen als nicht wesentlich verschieden angesehen werden.

Satz 14. *Ist* (7) *ein* $\mathfrak{F}$-*System und sind*

$$b_1, \ldots, b_n \tag{8}$$

[5]) Das $\mathfrak{F}$-System ist nicht zu verwechseln mit $\mathfrak{F}$-Folge und $\mathfrak{F}$-Menge in [Verb. 8], S. 231ff. und [Verb. 9], S. 55ff.

Elemente derart, daß

$$a_\nu \supseteq b_\nu \supset e \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

gilt, so ist auch (8) *ein* $\mathfrak{F}$*-System.*

Beweis: Satz 11.

Satz 15. *Es sei* (7) *ein* $\mathfrak{F}$*-System für* a*. Ist dann*

(9) $$b_1, \ldots, b_m$$

ein $\mathfrak{F}$*-System für eines der Elemente* (7)*, etwa für* a_ν*, so ist auch das durch Zusammensetzung entstehende System*

(10) $$a_1, \ldots, a_{\nu-1}, \quad b_1, \ldots, b_m, \quad a_{\nu+1}, \ldots, a_n$$

ein $\mathfrak{F}$*-System für* a*.*

Beweis. Die Elemente (10) sind nach Satz 11 zu je zweien fremd. Sie sind ferner sämtlich von e verschieden. Schließlich gilt

$$a_1 \ldots a_{\nu-1} b_1 \ldots b_m a_{\nu+1} \ldots a_n = a.$$

Der durch (9) bewirkte Übergang von (7) zu (10) möge als eine *Verfeinerung* des ersten $\mathfrak{F}$-Systems bezeichnet werden.

Erklärung 9. Unter einem *optimalen* $\mathfrak{F}$-System für a werde ein $\mathfrak{F}$-System für a verstanden, das nicht weiter verfeinert werden kann.

In dieser Arbeit betrachten wir nur $\mathfrak{F}$-Systeme, die aus endlich vielen Elementen bestehen.

§ 4.

Unabhängigkeit. Einfache Elemente.

Wir bauen die holoide Begriffswelt weiter aus und knüpfen zu diesem Zweck wieder an die Beziehung $\supseteq$ an.

Erklärung 10. Zwei Elemente a, b aus M, für die weder

$$a \supseteq b \quad \text{noch} \quad a \subseteq b$$

gilt, mögen voneinander *unabhängig* oder — nach einem neuerlichen, brieflich gemachten Vorschlag von A. Korselt — *unvergleichbar* heißen. Symbolisch werde die Unabhängigkeit von a und b durch $a \,\mathrm{U}\, b$ und die Abhängigkeit, also Vergleichbarkeit, durch $a \,\overline{\mathrm{U}}\, b$ ausgedrückt.

Satz 16. 1. *Mit* $a \,\mathrm{U}\, b$ *gilt* $b \,\mathrm{U}\, a$*; mit* $a \,\overline{\mathrm{U}}\, b$ *gilt* $b \,\overline{\mathrm{U}}\, a$*.*

Satz 16. 2. *Für jedes* a *gilt*

$$a \,\overline{\mathrm{U}}\, a, \quad a \,\overline{\mathrm{U}}\, e$$

und, falls das oberste Element f *existiert, auch* $a \,\overline{\mathrm{U}}\, f$*.*

Satz 17. *Ist*

$$a_1, \ldots, a_n$$

ein $\mathfrak{F}$-System, so sind die Elemente a_ν zu je zweien voneinander unabhängig.

Beweis. Wären zwei Elemente, etwa a_1 und a_2, voneinander abhängig, so müßte nach Satz 12. 1 entweder

$$a_1 = e \quad \text{oder} \quad a_2 = e$$

sein.

Erklärung 11. Ein Element a aus M, dessen Unterelemente einschließlich a und e zu je zweien voneinander abhängig sind, heiße ein *einfaches* Element von M.

Satz 18. *Jedes Unterelement eines einfachen Elementes ist selbst ein einfaches Element; insbesondere ist e ein einfaches Element.*

Erklärung 12. Ein von e verschiedenes Element a aus M, das nur e und a als Unterelemente hat, heiße ein *Primelement* von M.

Satz 19. *Jedes Primelement ist zugleich ein einfaches Element.*

Satz 20. *Jedes Primelement ist ein oberer Nachbar von e und umgekehrt.*

Nach Satz 9 enthält also jedes endliche Holoid, das aus mehr als einem Element besteht, Primelemente und damit auch einfache Elemente.

Satz 21. *Für kein einfaches Element gibt es ein $\mathfrak{F}$-System.*

Beweis. Wäre a ein einfaches Element mit einem $\mathfrak{F}$-System, so müßten die das $\mathfrak{F}$-System bildenden Elemente als Unterelemente eines einfachen Elementes zu je zweien voneinander abhängig sein, was dem Satz 17 widerspricht.

Erklärung 13. Sind die ein $\mathfrak{F}$-System konstituierenden Elemente

$$a_1, \ldots, a_n \tag{11}$$

sämtlich einfache Elemente, so heiße (11) ein *einfaches* $\mathfrak{F}$-System.

Satz 22. *Ist* (11) *ein einfaches $\mathfrak{F}$-System für ein Element a, so ist* (11) *auch ein optimales $\mathfrak{F}$-System für a.*

Beweis. Wäre die Behauptung falsch, so müßte sich (11) verfeinern lassen. Es müßte also für mindestens ein Element von (11) ein $\mathfrak{F}$-System geben. Das ist aber nach Satz 21 unmöglich.

Hinzuzufügen ist, daß sich der Satz 22 ohne Inanspruchnahme von weiteren passenden Axiomen nicht umkehren läßt.

Die naheliegende Doppelfrage, welche Elemente eines Holoids mindestens ein bzw. genau ein einfaches $\mathfrak{F}$-System aufweisen, ist so zu beantworten: Nach Satz 21 kommt keinem einfachen Element ein derartiges System zu;

dagegen gibt es im allgemeinen unter den übrigen Elementen — Beispiele bestätigen das — sowohl solche mit keinem als auch solche mit einem als auch solche mit mehr als einem einfachen $\mathfrak{F}$-System. Nur neue Axiome können hier Ordnung schaffen. Die Probleme, die damit erwachsen und nach einer Lösung drängen, sollen im dritten Teil der Arbeit behandelt werden. Dabei wird auch die Frage nach der Umkehrung von Satz 22 ihre Erledigung finden.

§ 5.

Halbverband und Semigruppe.

1. Bereits in der Einleitung wurde bemerkt, daß das kommutative Holoid die gemeinsame Grundlage für gewisse Halbverbände und Semigruppen bildet. In diesem Paragraphen soll auf den hier vorliegenden Sachverhalt näher eingegangen werden. Die genannten Bereiche ergeben sich dadurch, daß das bisher betrachtete Axiomensystem um zwei Axiome — es sind dies aber nicht die am Schluß von § 4 gemeinten — bereichert wird. Die beiden zusätzlichen *Axiome* lauten:

H. Für jedes Element a aus M gilt

$$a \bigcirc a = a.$$

S. Sind a, b und a' Elemente aus M derart, daß

$$a \bigcirc b = a' \bigcirc b$$

gilt, so ist

$$a = a'.$$

Wie ebenfalls in der Einleitung gezeigt worden ist, kann keine Holoidverknüpfung diesen beiden Axiomen zugleich genügen. Im folgenden lassen wir zunächst das Axiom H und sodann das Axiom S auf das als Grundgegebenheit fungierende Holoid M einwirken.

2. Die Axiome A I bis A V und H sind im logischen Sinn nicht alle voneinander unabhängig, wie der folgende Satz besagt:

Satz 23. *Das Axiom* A V *ist eine Folge der Axiome* A II, A III *und* H.

Beweis. Gilt

$$a = bx, \quad b = ay,$$

so ist nach H und A II

$$a = b(bx) = ba, \quad b = a(ay) = ab,$$

woraus sich nach A III die Identität von a und b ergibt, so daß das Axiom A V in Kraft ist.

Im System der Axiome A I bis A V und H kann also A V unterdrückt werden. Man erkennt so, daß das System dieser Axiome einen *Halbverband*[6]) in bezug auf die Verknüpfung $\bigcirc$ definiert. Gibt es für jedes Element a aus M nur *endlich* viele Elemente x, y aus M derart, daß

$$x \bigcirc y = a$$

gilt — und das ist beispielsweise der Fall, wenn M ein endliches Holoid ist —, so bewirkt das Axiom H nicht nur, daß M zu einem Halbverband, sondern darüber hinaus zu einem *Verband*[7]) wird, und zwar zu einem Verband in bezug auf die folgendermaßen erklärten Verknüpfungen $\cup$ und $\cap$: Die Verbandsverknüpfung $\cup$ ist mit der Holoidverknüpfung $\bigcirc$ identisch, so daß also dann und nur dann $a = a \cup b$ ist, wenn $a \supseteq b$ stattfindet; die andere Verbandsverknüpfung ist dadurch bestimmt, daß dann und nur dann $a = a \cap b$ ist, wenn $a \subseteq b$ stattfindet.

3. Wir gehen zur Besprechung des Axioms S über. Durch S wird das Holoid M zu einer *kommutativen Semigruppe* in bezug auf $\bigcirc$ ausgebaut. Anders wie soeben ist A V keine logische Folge von S und den übrigen Axiomen. Gilt

$$a = bx, \quad b = ay,$$

so folgt zwar nach A II und A III

$$ab = abxy$$

und daraus nach A IV und S

$$xy = e;$$

es läßt sich aber nicht

$$x = y = e$$

erzwingen. Ist nämlich die Semigruppe M insbesondere eine *Gruppe* in bezug auf $\bigcirc$, so sind wohl die Axiome A I bis A IV und S realisiert; dagegen ist, wenn der Operationsbereich aus mehr als einem Element besteht, das Axiom A V nicht in Kraft.

4. Wenn es auch unmöglich ist, daß ein Holoid sowohl ein Halbverband als auch eine Semigruppe in bezug auf ein und dieselbe Verknüpfung ist, so ist es doch andererseits keineswegs ausgeschlossen, daß ein und dieselbe Menge M in bezug auf eine erste Verknüpfung $\bigcirc$ ein dem Axiom H genügendes Holoid, also ein Halbverband ist und zugleich in bezug auf eine zweite Verknüpfung $\odot$ ein dem Axiom S genügendes Holoid, also eine kommutative Semigruppe darstellt. Dabei können die Verknüpfungen $\bigcirc$ und $\odot$, die nach dem Vorhergehenden stets voneinander verschieden sind, noch *gekoppelt* sein, d. h. sich gegenseitig mehr oder weniger stark beeinflussen. Von den ver-

[6]) Vgl. [H. 1], S. 33.
[7]) Vgl. [H. 1], S. 43.

schiedenen Koppelungsmöglichkeiten mag eine besonders wichtige hier Erwähnung finden. Bedeuten $\supseteq$ und $\trianglerighteq$ die den Verknüpfungen $\bigcirc$ und $\odot$ entsprechenden und in Erklärung 4 beschriebenen Fundamentalbeziehungen, so wird durch das folgende *Axiom* K eine sehr starke Koppelung ausgesprochen:

K. Sind a, b Elemente aus M derart, daß $a \supseteq b$ gilt, so gilt auch $a \trianglerighteq b$ und umgekehrt.

Nebenbei folgt aus K, daß ein und dasselbe Element von M sowohl untere Spitze in bezug auf $\bigcirc$ als auch in bezug auf $\odot$ ist.

Dafür ein Modell. Ist M die Menge der *natürlichen Zahlen*, d. h. die aus den Zahlen 1, 2, ... bestehende Menge, so darf, wie man sich leicht überzeugt, $a \bigcirc b$ als das *kleinste gemeinschaftliche Vielfache* und $a \odot b$ als das *gewöhnliche Produkt* von a und b aufgefaßt werden. Bei dieser Interpretation haben die beiden Abhängigkeiten

$$a \supseteq b, \quad a \trianglerighteq b$$

denselben Sinn; jede besagt, daß a ein ganzzahliges Vielfaches von b ist, so daß 1 die untere Spitze von M sowohl in bezug auf $\bigcirc$ als auch in bezug auf $\odot$ ist. Demnach ist für dieses Modell das Axiom K in Kraft.

Literaturverzeichnis.

C. Carathéodory.

[4] Über die Differentiation von Maßfunktionen. Math. Zeitschr. **46** (1940), S. 181—189.

[5] Bemerkungen zum Riesz-Fischerschen Satz und zur Ergodentheorie. Abh. aus dem Math. Seminar der Hansischen Universität **14** (1941), S. 351—389.

F. Klein-Barmen.

[Verb. 8] Über die ausgezeichneten Darstellungen der Elemente verzahnter harmonischer Verbände. Deutsche Math. **2** (1937), S. 216—241.

[Verb. 9] Ein weiterer Beitrag zum Problem der Zerlegung der Elemente gewisser harmonischer Verbände. Ebenda **3** (1938), S. 46—64.

[H. 1] Axiomatische Untersuchungen zur Theorie der Halbverbände und Verbände. Ebenda **4** (1939), S. 32—43.

[A. V. 4] Über Verbände mit einer weiteren assoziativen und kommutativen Elementverknüpfung. Math. Zeitschr. **47** (1940), S. 85—104.

[A. V. 5] Molekulare Verbände. Ebenda **47** (1941), S. 373—394.

J. König.

[1] Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Größen. Leipzig 1903.

F. Riesz.

[1] Sur quelques notions fondamentales dans la théorie générale des opérations linéaires. Ann. of Math. **41** (1940), S. 174—206.

[2] Sur la théorie ergodique des espaces abstraits. Acta scient. math. (Ungarn) **10** (1941), S. 1—20.

(Eingegangen am 10. Januar 1942.)

Über das asymptotische Verhalten der Lösungen gewisser linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Von

Otto Haupt in Erlangen.

1. In einer kürzlich erschienenen Note[1]) beweist Herr D. CALIGO folgendes: In der Differentialgleichung

$$(D) \qquad y'' + f(x)\, y = 0$$

sei $f(x)$ stetig in $[a, +\infty)$ und $f(x) = O(x^{-2-\beta})$ für passendes $\beta > 0$, wenn $x \to +\infty$. Dann existiert und ist endlich $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-1} y(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} y'(x)$ für jede Lösung $y(x)$ von (D).

2. Das eben erwähnte Theorem von Herrn CALIGO ist Spezialfall eines Satzes, welcher im folgenden (Nr. 3 und 4) für lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung formuliert und bewiesen werden soll. Dieser Satz ist auch für $n = 2$ allgemeiner als das Theorem von Herrn CALIGO: Einerseits nämlich umfaßt unser Satz nicht nur homogene, sondern auch inhomogene lineare Differentialgleichungen, andererseits wird, z. B. für den Fall der Differentialgleichung (D) (vgl. Nr. 1), in unserem Satz die in Nr. 1 erwähnte Bedingung $f(x) = O(x^{-2-\beta})$ abgeschwächt zur Forderung, daß $x f(x)$ absolut integrierbar sei. Schließlich erscheint unser Beweisverfahren einfacher als das von Herrn CALIGO.

Am Schlusse vorliegender Note (vgl. Nr. 5) wird auf weitere Verallgemeinerungsmöglichkeiten hingewiesen.

3. Der in Aussicht genommene Satz lautet so:

Satz. *Vor.: Es seien* $h(x)$ *und* $g_\nu(x)$, $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$, *stetig in* $\mathfrak{D} = [a, +\infty)$, $a > 0$. *Ferner sei* $x^{n-1-\nu} g_\nu(x)$, $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$, *absolut integrierbar*[2]) *und es sei* $h(x)$ *integrierbar in* $\mathfrak{D}$.

---

[1]) D. CALIGO, Comportamento asintotico degli integrali dell'equazione $y''(x) + A(x) y(x) = 0$, nella ipotesi $\lim\limits_{x \to +\infty} A(x) = 0$. Boll. Unione Mat. Italiana, ser. II, Anno III, Nr. 4 (1941), S. 286–295 = Publicazioni dell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo, Consiglio Nazionale delle Ricerche, Roma 1941, Nr. 100.

[2]) *Alle* im folgenden auftretenden *Limiten* beziehen sich auf $x \to +\infty$ und sind als *eigentlich* (endlich) anzunehmen. Es heißt $F(x)$ integrierbar bzw. absolut integrierbar, wenn der Limes von

$$\int_a^x f(\xi)\, d\xi \quad \text{bzw. von} \quad \int_a^x |F(\xi)|\, d\xi$$

existiert. Die Integrale können dabei als RIEMANNsche angenommen werden.

Beh.: Für jede Lösung $y(x)$ von

(L_n) $\quad L_n(y) = y^{(n)} + g_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + g_1(x)\,y' + g_0(x)y = h(x)$

gilt:

(A) $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} (n-1-\nu)!\, x^{\nu+1-n} y^{(\nu)}(x), \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1,$

existiert, wobei alle diese Limiten einander gleich sind.

4. Der Beweis ergibt sich so:

4.1. Wir setzen

(Y_{n-1}) $\quad L^*_{n-1}(y) = y^{(n-1)}(x) = \varphi(x).$

Dabei soll also $\varphi(x)$ stetig sein in $\mathfrak{D}$. Zufolge (Y_{n-1}) gilt dann

$$(Y) \qquad y(x) = \frac{1}{(n-2)!}\int_b^x (x-u)^{n-2}\,\varphi(u)\,du + \sum_{\varrho=0}^{n-2} \frac{1}{\varrho!}\,c_\varrho\,(x-b)^\varrho,$$

wo die b, c_ϱ, $\varrho = 0, 1, \ldots, n-2$, (beliebig wählbare) Konstanten sind $(a \leqq b)$. Daher gilt allgemeiner

$$(Y_\nu) \quad y^{(\nu)}(x) = \frac{1}{(n-2-\nu)!}\int_b^x (x-u)^{n-2-\nu}\,\varphi(u)\,du + \sum_{\varrho=\nu}^{n-2} \frac{1}{(\varrho-\nu)!}\,c_\varrho\,(x-b)^{\varrho-\nu},$$

$$\nu = 0, \ldots, n-2.$$

4.2. Zum Beweise von (A) *genügt* es, die *Existenz von* $\lim y^{(n-1)}$ sicherzustellen. Denn alsdann gilt, wie bekannt, (A) für alle ν.

In der Tat besitzt dann $(n-1-\nu)\left(\int_b^x (x-u)^{n-2-\nu}\,\varphi(u)\,du\right) x^{\nu+1-n}$, für $\nu = 0, 1, \ldots, n-2$, den Limes $\varphi_0 = \lim y^{(n-1)}(x)$, woraus wegen (Y_ν) die Behauptung (A) folgt.

4.3. Aus (Y_ν) (Nr. 4.1) ergibt sich weiter:

Jeder Lösung von $L_n(y) = h(x)$, welche der Bedingung

(L_{n-1}) $\quad \lim y^{(n-1)}(x)$ *existiert*

genügt, entspricht vermöge (Y_{n-1}) und (Y) (Nr. 4.1) *eindeutig eine stetige Lösung $\varphi(x)$ der Integralgleichung*

$$(V) \qquad \varphi(x) = J(\varphi; x) + H(x; c_0, \ldots, c_{n-1}),$$

$$J(\varphi; x) =$$

$$= -\int_b^x g_{n-1}(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi - \int_b^x \left\{\int_b^\xi \left[\sum_{\nu=0}^{n-2} \frac{1}{(n-2-\nu)!}\,g_\nu(\xi)\,(\xi-u)^{n-2-\nu}\right]\varphi(u)\,du\right\} d\xi,$$

$$H(x; c_0, \ldots, c_{n-1}) = c_{n-1} + \int_b^x h(\xi)\,d\xi + \sum_{\varrho=0}^{n-2} c_\varrho h_\varrho(x),$$

wobei die $h_\varrho(x)$ *lineare Verbindungen von Gliedern der Form*

$$(H) \qquad \int_b^x g_\nu(\xi)\,\xi^t\,d\xi \text{ mit } 0 \leqq t \leqq n-\nu-2, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-2,$$

also insbesondere unabhängig von $\varphi(x)$ *sind. Es ist* b *mit* $a \leqq b$ *beliebig wählbar.*

Für $\varphi(x)$ *ist dabei überdies die Bedingung erfüllt*

$$(\Omega) \qquad \lim \varphi(x) \text{ existiert.}$$

Umgekehrt wird durch jede stetige, (Ω) *erfüllende Lösung* $\varphi(x)$ *von* (V) *vermittelst* (Y) *eine,* (L_{n-1}) *erfüllende Lösung* $y(x)$ *von* $L_n(y) = h(x)$ *geliefert.*

4.4. Die $c_0, \ldots, c_{n-2}, c_{n-1}$ sind gleich den „Anfangswerten" $y(b), \ldots, y^{(n-2)}(b), y^{(n-1)}(b)$ von $y(x)$ in $x = b$. Es ist aber eine Lösung y von $L_n(y) = h(x)$ eindeutig in $[a, +\infty)$ durch ihre Anfangswerte in $x = b$ festgelegt. Daher genügt zum Beweise des Satzes in Nr. 3 der Nachweis, daß bei beliebig vorgegebenen $c_0, \ldots, c_{n-1}$ (mindestens) eine Lösung $\varphi(x)$ von (V) existiert und daß diese Lösung der Bedingung (Ω) genügt, wenn nur b mit $b \geqq a$ passend gewählt wird. Dieser Nachweis gelingt in bekannter Weise durch Konstruktion mittels schrittweiser Näherung[3]); und zwar gelingt die Konstruktion vermöge der (bis jetzt noch nicht benutzten) Voraussetzung, daß $x^{n-1-\nu} g_\nu(x)$ bzw. $h(x)$ absolut integrierbar bzw. integrierbar sein soll $(\nu = 0, \ldots, n-1)$.

5. Der in Nr. 3 ausgesprochene Satz gibt eine hinreichende Bedingung dafür, daß die Differentialgleichung $L_n(y) = h(x)$ unter den

„Randbedingungen": I) $y^{(\nu)}(b) = B_\nu$, $\nu = 0, \ldots, n-1$, und

II) $\lim y^{(n-1)}(x)$ existiert,

bei beliebig vorgegebenem B_ν und hinreichend großem b[4]) Lösungen besitzt.

Der wesentliche Beweisgedanke bestand (Nr. 4. 1) darin, zunächst die aus der Randbedingung II) entspringende Differentialgleichung $L^*_{n-1}(y) = y^{(n-1)}(x) = \varphi(x)$ für beliebiges, stetiges, bei $x \to +\infty$ konvergierendes $\varphi(x)$ zu lösen und damit eine *Integraldarstellung für* y *vermittelst* $\varphi(x)$ zu erhalten [vgl. (Y) in Nr. 4. 1]. Indem man mittels dieser Integraldarstellung $\varphi(x)$ an Stelle von $y(x)$ in die Differentialgleichung $L_n(y) = h(x)$ einführt, erhält man eine *in* $\varphi(x)$ *lineare Integro-Differentialgleichung*, welche vermittelst einer Quadratur in eine lineare Integralgleichung (V) zweiter Art für $\varphi(x)$ übergeht und welche, zusammen mit der Forderung, daß lim $\varphi(x)$

[3]) Vgl. HAUPT, Über Lösungen linearer Differentialgleichungen mit Asymptoten. Math. Zeitschr. **48** (1942), S. 212—220.

[4]) Aus dem Eindeutigkeitssatz für $L_n(y) = h(x)$ bzw. für (V) folgt, daß statt $x = b$ auch $x = a$ genommen werden kann. Die Annahme, daß b hinreichend groß sein solle, ist nur zur Vereinfachung des Existenzbeweises in Nr. 4. 4 gemacht.

existiert, gleichwertig ist mit $L_n(y) = h(x)$ zusammen mit den Randbedingungen I) II).

5.1. Die soeben erwähnte *Zurückführung der „Randwertaufgabe" für* $L_n(y) = h(x)$ *auf eine lineare Integralgleichung* mit der Nebenbedingung, daß für eine Lösung $\varphi(x)$ dieser Integralgleichung $\lim \varphi(x)$ existiert, ist genau so auch in dem *allgemeinen Falle* möglich, in welchem die *Randbedingung* II) *darin besteht, daß irgend ein vorgeschriebener linearer Differentialausdruck* $(n-1)$*-ter Ordnung*

$$L^*_{n-1}(y) = y^{(n-1)} + k_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \cdots + k_0(x)y$$

für $x \to +\infty$ *einen Limes besitzt, wenn für* y *die betrachtete Lösung* $y(x)$ *von* $L_n(y) = h(x)$ *eingesetzt wird.*

Um dies einzusehen, braucht man nur $L^*_{n-1}(y) = \varphi(x)$ zu setzen.

In dieses allgemeinere Problem ordnet sich die in einer vorangehenden Note[3]) (für $n = 2$) behandelte Aufgabe ein, Lösungen von $L_n(y) = h(x)$ zu bestimmen, welche asymptotische Parabeln $(n-1)$-ten Grades besitzen; diese Aufgabe entspricht nämlich[5]) dem Falle, daß

$$L^*_{n-1}(y) = x^n \frac{d^{n-1}}{d\,x^{n-1}}\,[x^{-1}\,y\,(x)].$$

5.2. Tritt an Stelle von $L^*_{n-1}(y)$ ein linearer Differentialausdruck $L^*_{n-\tau}(y)$ der Ordnung $(n-\tau)$ mit $2 \leqq \tau \leqq n-1$, so führt das in Nr. 5 geschilderte Verfahren wiederum zu einer linearen Integro-Differentialgleichung für $\varphi(x)$.

5.3. Eine hier anschließende Frage ist die nach weniger fordernden hinreichenden Bedingungen dafür, daß beispielsweise die in vorliegender Note betrachtete Randwertaufgabe (vgl. Nr. 5) zu vorgegebenen B_ν eine Lösung besitzt; und damit die Frage nach Abschwächung der über die $g_\nu(x)$ und über $h(x)$ gemachten Stetigkeits- bzw. Integrabilitätsvoraussetzungen[6]). Wir behalten uns vor, später darauf zurückzukommen, ebenso wie auf die in Nr. 5. 1. und 5. 2. angeschnittenen Verallgemeinerungen.

---

[5]) Vgl. HAUPT, Über Asymptoten ebener Kurven. Journ. f. d. r. u. angew. Math. **152** (1922), S. 8, (D_0).

[6]) Vgl. dazu a. a. O.[3]), Nr. 2. 3. 1. In Betracht käme ferner u. a. der Übergang zu LEBESGUE-Integralen. In diesem Zusammenhang sei noch hingewiesen auf eine [a. a. O.[1]) nicht erwähnte] Arbeit von D. CALIGO, Un criterio di sufficiente stabilità per le soluzioni dei sistemi di equazioni integrali e sue applicazioni, Atti d. reale Accad. Italia, Rend. Cl. sci. fis., mat. e nat., 7. s., vol. I (1940), 497 ff.

(Eingegangen am 10. 2. 1942.)

Ein Kriterium für die algebraischen Zahlen.

Von

C. Pisot in Greifswald.

Seit LAGRANGE ist bekannt, daß die reellen algebraischen Zahlen zweiten Grades durch die Periodizität ihrer Kettenbruchentwicklung gekennzeichnet sind. Es ist vielfach versucht worden, diese schöne Eigenschaft auf algebraische Zahlen höheren Grades zu übertragen, und es gibt manche Ergebnisse in dieser Richtung. Stellt man die formale Einfachheit der Rechnung in den Vordergrund, wie das z. B. in der JACOBIschen Verallgemeinerung der Kettenbrüche[1]) geschieht, so ist es bisher noch nicht gelungen, die Frage nach der Periodizität dieser Entwicklung zu entscheiden. Wenn man aber die Schärfe der Annäherung als erstes Erfordernis ansieht, wie dies unter anderem für H. MINKOWSKIS Kriterium[2]) gilt, so muß man die Periodizität und besonders die Einfachheit der Rechnungen aufgeben.

Die Periodizität bedingt eine gewisse Regelmäßigkeit in der Verteilung der Näherungsbrüche; darin werden wir die Grundlage unseres Kriteriums erblicken. Vorliegende Arbeit hat ihren Ausgangspunkt in früheren Untersuchungen des Verfassers[3]); eine vorbereitende Note erschien in den Comptes Rendus der Akademie von Paris[4]). Es wurde aber nach Möglichkeit versucht, eine geschlossene Darstellung zu bringen und dem Leser die Kenntnisnahme früherer Originalarbeiten zu ersparen.

Wir bezeichnen durchweg mit *kleinen lateinischen Buchstaben* ganze rationale Zahlen und mit $C_1, C_2, \ldots$ geeignete, von n unabhängige positive feste Zahlen.

Zuerst wollen wir unser Kriterium an den Zahlen zweiten Grades erläutern. Es sei ξ eine reelle algebraische Zahl zweiten Grades. Aus der Periodizität der Kettenbruchentwicklung von ξ folgt das Vorhandensein von unendlich vielen verschiedenen rationalen Näherungsbrüchen $\frac{u_n}{v_n}$, die folgende Eigenschaften haben:

---

[1]) JACOBI, Journ. f. reine u. angew. Math. 69 (1868), S. 29—64; Werke 6, S. 385—426.

[2]) MINKOWSKI, Gött. Nachr. 1899, S. 64—88; Ges. Abh. 1, S. 293—315.

[3]) PISOT, Annali Sc. Norm. Pisa, Ser. 2, 7 (1938), S. 205—248.

[4]) PISOT, C. R. Akad. Paris 206 (1938), S. 1862—1864.

A. Regelmäßigkeit der Verteilung. *Es gibt eine Zahl* $\varrho > 1$ *und ein festes Zahlenpaar* C_1, C_2, *so daß zugleich*

$$|u_{n+1} - \varrho u_n| < \frac{C_1}{|u_n|} \quad \text{und} \quad |v_{n+1} - \varrho v_n| < \frac{C_2}{|v_n|}$$

besteht.

B. Schärfe der Annäherung. *Es gilt die Ungleichung*:

$$|u_n - \xi v_n| < \frac{1}{|v_n|}.$$

Beweis. Wir bezeichnen mit $\frac{p_k}{q_k}$ den k-ten Näherungsbruch bei der Entwicklung von ξ in einen regelmäßigen Kettenbruch. Nach Lagrange wird der Kettenbruch für ξ periodisch; d. h. es sei ξ_k der k-te vollständige Quotient, der durch

$$\xi = \frac{p_{k+1}\xi_k + p_k}{q_{k+1}\xi_k + q_k} \tag{1}$$

erklärt ist, dann gibt es eine natürliche Zahl h, so daß

$$\xi_{k+h} = \xi_k \qquad \text{für } k > k_0. \tag{2}$$

Nach (1) erhält man

$$\xi_k = -\frac{p_k - \xi q_k}{p_{k+1} - \xi q_{k+1}} \quad \text{und} \quad \xi_{k+h} = -\frac{p_{k+h} - \xi q_{k+h}}{p_{k+h+1} - \xi q_{k+h+1}}.$$

Aus (2) folgt daraus das Vorhandensein einer Zahl ϱ, für die

$$\varrho\,(p_{k+h} - \xi\, q_{k+h}) = (-1)^h (p_k - \xi q_k) \tag{3}$$

und zugleich

$$\varrho\,(p_{k+h+1} - \xi q_{k+h+1}) = (-1)^h (p_{k+1} - \xi q_{k+1}) \tag{4}$$

gilt. Durch vollständige Induktion nach k sieht man, daß (3) für alle $k > k_0$ gilt; ϱ ist deshalb von k unabhängig. Eliminieren wir ξ aus den zwei Gleichungen (3) und (4), so erhält man

$$\begin{vmatrix} \varrho\, p_{k+h} & -(-1)^h p_k & \varrho\, q_{k+h} & -(-1)^h q_k \\ \varrho\, p_{k+h+1} & -(-1)^h p_{k+1} & \varrho\, q_{k+h+1} & -(-1)^h q_{k+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Unter Berücksichtigung der Beziehungen

$$p_{k+h}\, q_{k+h+1} - p_{k+h+1}\, q_{k+h} = (-1)^h (p_k\, q_{k+1} - p_{k+1}\, q_k) = \pm 1$$

ergibt sich eine Gleichung

$$\varrho^2 + a\,\varrho + (-1)^h = 0, \tag{5}$$

wobei a eine gewisse, von k unabhängige, ganze rationale Zahl bedeutet. Die Norm von ϱ hat den Betrag Eins, ϱ ist also eine Einheit, die nach (3) dem Körper von ξ angehört. Außerdem ist

$$\begin{aligned}\varrho &= (-1)^h \frac{p_k - \xi q_k}{p_{k+h} - \xi q_{k+h}} \\ &= \left(-\frac{p_k - \xi q_k}{p_{k+1} - \xi q_{k+1}}\right)\left(-\frac{p_{k+1} - \xi q_{k+1}}{p_{k+2} - \xi q_{k+2}}\right) \cdots \left(-\frac{p_{k+h-1} - \xi q_{k+h-1}}{p_{k+h} - \xi q_{k+h}}\right) \\ &= \xi_k \xi_{k+1} \cdots \xi_{k+h-1}.\end{aligned}$$

Da aber alle $\xi_k > 1$ sind, ist auch $\varrho > 1$.

Die Gleichung (3) für k und für $k+h$ gibt

$$\varrho = (-1)^h \frac{p_{k+h} - \xi q_{k+h}}{p_{k+2h} - \xi q_{k+2h}} \quad \text{und} \quad \varrho^2 = \frac{p_k - \xi q_k}{p_{k+2h} - \xi q_{k+2h}}.$$

Durch Eintragen in die Gleichung (5) folgt daraus

$$(p_{k+2h} - \xi q_{k+2h}) + a\,(p_{k+h} - \xi q_{k+h}) + (-1)^h (p_k - \xi q_k) = 0.$$

Da ξ irrational ist, spaltet sich diese Gleichung in das System

$$\begin{aligned} p_{k+2h} + a p_{k+h} + (-1)^h p_k &= 0, \\ q_{k+2h} + a q_{k+h} + (-1)^h q_k &= 0, \end{aligned}$$

das für alle $k > k_0$ gilt. Bezeichnen wir für beliebiges festes $k > k_0$ mit u_n die Zahl p_{k+nh} und mit v_n die Zahl q_{k+nh}, so gelten also folgende lineare Rekursionen:

$$\begin{aligned} u_{n+2} + a u_{n+1} + (-1)^h u_n &= 0, \\ v_{n+2} + a v_{n+1} + (-1)^h v_n &= 0. \end{aligned}$$

Es sei ϱ' die zu ϱ konjugierte Wurzel der Gleichung (5). Die Lösungen dieser Rekursionen kann man bekanntermaßen auf die Form

$$\begin{aligned} u_n &= \lambda \varrho^n + \lambda' \varrho'^n, \\ v_n &= \mu \varrho^n + \mu' \varrho'^n \end{aligned}$$

bringen, wo λ, λ', μ, μ' geeignete Konstanten bedeuten. Aus diesen Formeln erhält man:

$$u_{n+1} - \varrho u_n = \lambda'(\varrho' - \varrho)\varrho'^n \quad \text{und} \quad v_{n+1} - \varrho v_n = \mu'(\varrho' - \varrho)\varrho'^n.$$

Da aber $|\varrho'| = \frac{1}{\varrho}$, so strebt ϱ'^n mit wachsendem n nach Null, und

$$\varrho^n = \frac{u_n}{\lambda} - \frac{\lambda'}{\lambda}\varrho'^n > C_3 |u_n|.$$

Folglich ist

$$|u_{n+1} - \varrho u_n| = \frac{|\lambda'(\varrho' - \varrho)|}{\varrho^n} < \frac{C_1}{|u_n|}.$$

Ebenso sieht man ein, daß

$$|v_{n+1} - \varrho v_n| < \frac{C_2}{|v_n|}.$$

Die Näherungsbrüche $\frac{u_n}{v_n}$ besitzen also die Eigenschaft A. Die Eigenschaft B folgt sofort aus der Tatsache, daß $\frac{u_n}{v_n}$ Kettenbruchnäherungen sind.

Diese Eigenschaften lassen sich nun auf beliebige reelle algebraische Zahlen übertragen und wir werden nachweisen, daß wir darin ein Kriterium für diese algebraischen Zahlen erblicken können. Es gilt nämlich folgender Satz I, sowie seine Umkehrung Satz II:

Satz I. *Jeder reellen algebraischen Zahl ξ vom Grade s kann man eine unendliche Folge von Näherungsbrüchen $\frac{u_n}{v_n}$ mit folgenden Eigenschaften zuordnen:*

A. Regelmäßigkeit der Verteilung. *Es gibt eine Zahl $\alpha > 1$ und positive feste Zahlen C_4, C_5, ε, so daß zugleich*

$$|u_{n+1} - \alpha u_n| < \frac{C_4}{|u_n|^\varepsilon} \quad \text{und} \quad |v_{n+1} - \alpha v_n| < \frac{C_5}{|v_n|^\varepsilon}$$

besteht.

B. Schärfe der Annäherung. *Es gibt eine feste Zahl C_6, so daß mit demselben ε*

$$|u_n - \xi v_n| < \frac{C_6}{|v_n|^\varepsilon}$$

gilt.

Zusatz. *Jedes ε der vorbemerkten Art kann den Wert $\frac{1}{s-1}$ nicht überschreiten. Man kann aber die Existenz eines beliebig nahe an $\frac{1}{s-1}$ gelegenen ε durch geeignete Wahl von α erzwingen.*

Satz II. *Jede reelle Zahl ξ, die eine unendliche Folge von Näherungsbrüchen $\frac{u_n}{v_n}$ mit der Eigenschaft* A *besitzt, ist algebraisch; ihr Grad s kann den Wert $1 + \frac{1}{\varepsilon}$ nicht überschreiten, und die Näherungsbrüche $\frac{u_n}{v_n}$ besitzen die Eigenschaft* B.

Aus dem Satz II fließt also auch die Tatsache, daß die Eigenschaften A und B nicht unabhängig sind, sondern daß B eine Folge von A ist.

Um die Schärfe der Annäherung zu beurteilen, können wir bemerken, daß wir auf diese Weise $s-1$ linear unabhängige Zahlen $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(s-1)}$ des Körpers von ξ durch Näherungsbrüche $\frac{u_n^{(1)}}{v_n}, \frac{u_n^{(2)}}{v_n}, \cdots, \frac{u_n^{(s-1)}}{v_n}$ mit gleichem Nenner annähern können. Dabei nennen wir die Zahlen $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(s-1)}$ linear unabhängig, wenn wir kein System nicht sämtlich verschwindender ganzer rationalen Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_s$ so finden können, daß

$$c_1 \xi^{(1)} + c_2 \xi^{(2)} + \cdots + c_{s-1} \xi^{(s-1)} + c_s = 0$$

wird. Für die Schärfe der Annäherung gilt dann

$$|u_n^{(r)} - \xi^{(r)} v_n| < \frac{C_7}{|v_n|^{\varepsilon}} \quad \text{für } r = 1, 2, \ldots, s-1. \tag{6}$$

Es ist aber bekannt, daß $\frac{1}{s-1}$ der größte Exponent ε ist, der für alle Systeme von $s-1$ linear unabhängigen Zahlen gleichzeitige Näherungen mit (6) gestattet. Wenn $\varepsilon = \frac{1}{s-1}$, haben wir also den Typus der bestmöglichen gleichzeitigen Annäherung durch rationale Brüche mit gleichem Nenner. Dieser Fall kann aber nur für Körper zweiten Grades oder Körper dritten Grades mit zwei imaginären konjugierten Körpern erhalten werden.

Um den Satz I zu beweisen, zeigen wir, daß eine Zahl die Rolle von α spielen kann, wenn sie größer als Eins und eine ganze algebraische Zahl des Körpers von ξ ist, deren sämtliche Konjugierten dem Betrage nach kleiner als Eins sind. Daß es solche Zahlen gibt, lehrt uns folgender Hilfssatz:

Hilfssatz 1. *In jedem reellen algebraischen Zahlkörper gibt es ganze algebraische Zahlen α, die den Ungleichungen*

$$\alpha > 1 \quad \textit{und} \quad |\alpha_r| < 1 \qquad \textit{für } r = 2, \ldots, s \tag{7}$$

genügen. Hierbei ist s der Grad des Körpers und $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$ sind die von α verschiedenen Konjugierten von α.

Beweis. Es sei $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ eine Basis für die ganzen Zahlen des Körpers; die konjugierten Zahlen $\omega_{1,r}, \omega_{2,r}, \ldots, \omega_{s,r}$ für $r = 2, \ldots, s$ bilden eine Basis für die konjugierten Körper. Jede ganze Zahl α und ihre Konjugierten sind dann von der Form:

$$\begin{aligned} \alpha &= x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + \cdots + x_s\omega_s \\ \alpha_r &= x_1\omega_{1,r} + x_2\omega_{2,r} + \cdots + x_s\omega_{s,r} \quad \text{für } r = 2, \ldots, s \end{aligned} \tag{8}$$

mit ganzen rationalen $x_1, x_2, \ldots, x_s$. Die Determinante Δ der $\omega_{h,r}$ ist die Quadratwurzel aus der Diskriminante des Körpers, also von Null verschieden. Nach dem Minkowskischen Satze über Linearformen, kann man ganze rationale $x_1, x_2, \ldots, x_s$, die nicht alle verschwinden, so finden, daß

$$|\alpha| \leqq \beta \quad \text{und} \quad |\alpha_r| \leqq \gamma \qquad \text{für } r = 2, \ldots, s,$$

wenn nur die Zahlen β, γ der Ungleichung

$$\beta\gamma^{s-1} \geqq |\Delta|$$

genügen. Wählen wir nun $\gamma < 1$, so folgt aus $|\text{Norm}\,\alpha| \geqq 1$, daß

$$1 \leqq |\text{Norm}\,\alpha| = |\alpha\alpha_2 \ldots \alpha_s| \leqq |\alpha|\,\gamma^{s-1} < |\alpha|.$$

Die Zahl α oder $-\alpha$ erfüllt daher die Ungleichungen (7). Wir haben somit das Vorhandensein solcher Zahlen α bewiesen. Wählen wir noch β so, daß

$\beta\gamma^{s-1} = |\Delta|$, so erkennen wir sogar die Existenz von Zahlen α, die der Zusatzbedingung

$$\alpha\gamma^{s-1} \leqq |\Delta| \tag{9}$$

genügen.

Die Gleichung s-ten Grades für α ist irreduzibel. Würde sie nämlich in Faktoren zerlegbar sein, so hätte einer dieser Faktoren nur Wurzeln, deren Betrag kleiner als Eins wäre; die Norm einer solchen Wurzel hätte also einen Betrag kleiner als Eins und wäre somit Null, denn diese Norm ist eine ganze rationale Zahl. Eine der Zahlen α_r wäre daher Null; das ist aber unmöglich, denn die Ausdrücke (8) können die Null nur darstellen, wenn $x_1 = x_2 = \cdots = x_s = 0$.

Beweis von Satz I. Es sei nun ξ eine reelle algebraische Zahl s-ten Grades; ξ läßt sich auf unendlich viele Weisen als Quotient $\frac{\lambda}{\mu}$ zweier ganzen Zahlen λ, μ des Körpers von ξ darstellen. Wir bezeichnen mit dem Index $r = 2, \ldots, s$ die Konjugierten der vorkommenden Zahlen des Körpers von ξ. Es sei α eine ganze Zahl des Körpers, die den Ungleichungen (7) des Hilfssatzes 1 genügt. Die Ausdrücke

$$u_n = \lambda\alpha^n + \lambda_2\alpha_2^n + \cdots + \lambda_s\alpha_s^n,$$
$$v_n = \mu\alpha^n + \mu_2\alpha_2^n + \cdots + \mu_s\alpha_s^n$$

sind ganze rationale Zahlen. Man hat

$$u_{n+1} - \alpha u_n = \lambda_2(\alpha_2 - \alpha)\alpha_2^n + \cdots + \lambda_s(\alpha_s - \alpha)\alpha_s^n,$$
$$v_{n+1} - \alpha v_n = \mu_2(\alpha_2 - \alpha)\alpha_2^n + \cdots + \mu_s(\alpha_s - \alpha)\alpha_s^n.$$

Da aber $|\alpha_2| < 1, \ldots, |\alpha_s| < 1$, so streben $\alpha_2^n, \ldots, \alpha_s^n$ mit wachsendem n nach Null. Denken wir uns die $|\alpha_r|$ der Größe nach geordnet, etwa

$$|\alpha_2| \geqq |\alpha_3| \geqq \cdots \geqq |\alpha_s|,$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \alpha u_n| &< C_8 |\alpha_2|^n, \\ |v_{n+1} - \alpha v_n| &< C_9 |\alpha_2|^n. \end{aligned} \tag{10}$$

Aus

$$\alpha^n = \frac{u_n}{\lambda} - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda}\alpha_2^n + \cdots + \frac{\lambda_s}{\lambda}\alpha_s^n\right) = \frac{v_n}{\mu} - \left(\frac{\mu_2}{\mu}\alpha_2^n + \cdots + \frac{\mu_s}{\mu}\alpha_s^n\right)$$

schließen wir das Vorhandensein von Konstanten C_{10}, C_{11}, so daß

$$\alpha^n > C_{10}|u_n| \quad \text{und} \quad \alpha^n > C_{11}|v_n|.$$

Es sei nun ε der Exponent für den

$$|\alpha_2| = \frac{1}{\alpha^\varepsilon},$$

dann ist $\varepsilon > 0$, und man erhält aus (10)

$$|u_{n+1} - \alpha u_n| < \frac{C_8}{\alpha^{\varepsilon n}} < \frac{C_4}{|u_n|^{\varepsilon}} \quad \text{und} \quad |v_{n+1} - \alpha v_n| < \frac{C_9}{\alpha^{\varepsilon n}} < \frac{C_5}{|v_n|^{\varepsilon}}.$$

Die Näherungsbrüche $\frac{u_n}{v_n}$ besitzen somit die Eigenschaft A.

Um auch die Eigenschaft B abzuleiten, bilden wir

$$u_n - \xi v_n = u_n - \frac{\lambda}{\mu} v_n = \left(\lambda_2 - \frac{\lambda}{\mu}\mu_2\right)\alpha_2^n + \cdots + \left(\lambda_s - \frac{\lambda}{\mu}\mu_s\right)\alpha_s^n.$$

Wie oben schließen wir daraus, daß

$$|u_n - \xi v_n| < \frac{C_6}{|v_n|^{\varepsilon}}.$$

Gleichzeitige Näherungen. In einem Körper vom Grade s gibt es höchstens $s-1$ linear unabhängige Zahlen; es seien $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(s-1)}$ solche $s-1$ linear unabhängige Zahlen des Körpers. Man kann sie als Quotienten $\xi^{(r)} = \frac{\lambda^{(r)}}{\mu}$ für $r = 1, 2, \ldots, s-1$ ganzer algebraischen Zahlen mit gleichem Nenner μ darstellen. Die Zahlen:

$$\begin{aligned} u_n^{(r)} &= \lambda^{(r)}\alpha^n + \lambda_2^{(r)}\alpha_2^n + \cdots + \lambda_s^{(r)}\alpha_s^{(n)} \quad \text{für } r = 1, 2, \ldots, s-1, \\ v_n &= \mu\,\alpha^n + \mu_2\alpha_2^n + \cdots + \mu_s\alpha_s^n \end{aligned}$$

sind ganz rational und wie oben erhält man

$$|u_n^{(r)} - \xi^{(r)} v_n| < \frac{C_{12}}{|v_n|^{\varepsilon}} \quad \text{für } r = 1, 2, \ldots, s-1.$$

Schärfe der Annäherung. Um nun den Exponenten ε abzuschätzen, beachten wir, daß

$$\alpha\,|\alpha_2|^{\frac{1}{\varepsilon}} = 1 \leqq |\operatorname{Norm}\alpha| = \alpha\,|\alpha_2 \ldots \alpha_s| \leqq \alpha|\alpha_2|^{s-1}. \tag{11}$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{\varepsilon} \geqq s-1 \quad \text{oder} \quad \varepsilon \leqq \frac{1}{s-1}.$$

Das Gleichheitszeichen kann hier nur stehen, wenn es in (11) überall steht, also wenn

$$1 = |\operatorname{Norm}\alpha| = \alpha|\alpha_2|^{s-1}.$$

Es muß daher α eine Einheit sein, deren Konjugierte alle den gleichen Betrag haben. Minkowski[5]) hat aber nachgewiesen, daß es solche Einheiten nur gibt in den Körpern zweiten Grades und in den Körpern dritten Grades mit imaginären Konjugierten; ihre Existenz ist in diesen Körpern trivial. Diese Fälle sind also die einzigen, wo wir $\varepsilon = \frac{1}{s-1}$, also die besten gleichzeitigen Näherungen haben können. In den Körpern zweiten Grades erhalten wir so

[5]) Minkowski, Acta math. **26** (1902), S. 333–351; Ges. Abh. **1**, S. 357–371.

im wesentlichen die Kettenbruchnäherungen. Wenn ξ keinem solchen Körper zweiten oder dritten Grades angehört, ist $\varepsilon < \frac{1}{s-1}$; wir wollen aber zeigen, daß ε bei geeignet gewähltem α beliebig nahe an $\frac{1}{s-1}$ gewählt werden kann.

Im Hilfssatz 1 haben wir das Vorhandensein von Zahlen α nachgewiesen, die der Ungleichung (9) genügen. Für solche Zahlen ist somit

$$\alpha |\alpha_2|^{s-1} \leqq \alpha \gamma^{s-1} \leqq |\Delta|.$$

Aber $|\alpha_2| = \alpha^{-s}$, folglich ist

$$\alpha^{1-s(s-1)} \leqq |\Delta|,$$

also

$$\varepsilon \geqq \left(1 - \frac{\log |\Delta|}{\log \alpha}\right) \frac{1}{s-1}.$$

Da α beliebig groß gewählt werden kann, ist es möglich, für die Größe $1 - \frac{\log |\Delta|}{\log \alpha}$ einen von Eins beliebig wenig verschiedenen Wert zu erhalten. In Verbindung mit der Ungleichung $\varepsilon < \frac{1}{s-1}$ ergibt sich dadurch unsere Behauptung.

Berechnung der Zahlen α. Die Zahlen α, deren Bedeutung in dieser Frage hier hervortritt, können auch leicht numerisch berechnet werden. Betrachten wir nämlich für eine beliebige ganze algebraische Zahl ν des Körpers von α die ganze rationale Zahl

$$w_n = \nu \alpha^n + \nu_2 \alpha_2^n + \cdots + \nu_s \alpha_s^n.$$

Dann strebt $\frac{w_{n+1}}{w_n}$ für wachsendes n nach α, und zwar ist

$$\left| \frac{w_{n+1}}{w_n} - \alpha \right| < \frac{C_{13}}{|w_n|^{1+\varepsilon}} < \frac{C_{14}}{|w_{n+1}|^{1+\varepsilon}}.$$

Man hat also

$$\left| w_{n+2} - \frac{w_{n+1}}{w_n} w_{n+1} \right| < |w_{n+2} - \alpha w_{n+1}| + \frac{C_{14}}{|w_{n+1}|^{s}} < \frac{C_{13} + C_{14}}{|w_{n+1}|^{s}}.$$

Dieser Ausdruck strebt nach Null und es gibt somit einen Index m, so daß für $n > m$ immer

$$\left| w_{n+2} - \frac{w_{n+1}^2}{w_n} \right| < \frac{1}{2} \tag{12}$$

wird; das heißt für $n > m$ ist w_{n+2} die an $\frac{w_{n+1}^2}{w_n}$ am nächsten liegende ganze Zahl. Man kann also die Folge der Zahlen w_n, von w_m, w_{m+1} ausgehend, durch einfache Rechnungen bestimmen. Als Grenzwert von $\frac{w_{n+1}}{w_n}$ kann dann die Zahl α mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden; es ist

$$\left| \frac{w_{n+1}}{w_n} - \alpha \right| < \frac{C_{13}}{|w_n|^{1+\varepsilon}}.$$

Wir streifen hier folgende Frage: Von zwei beliebigen ganzen rationalen Zahlen w_0, w_1 mit $|w_0| \leqq |w_1|$ ausgehend, bestimmen wir eine Folge von ganzen rationalen Zahlen w_n durch die Ungleichung (12) für $n \geqq 0$. Man sieht leicht ein, daß $\frac{w_{n+1}}{w_n}$ für wachsendes n einen Grenzwert hat. Ich möchte nun folgende Vermutung aussprechen, deren Beweis neue Einblicke in die Eigenschaften der algebraischen Zahlen eröffnen würde:

Der Grenzwert von $\frac{w_{n+1}}{w_n}$ für jedes Paar w_0, w_1 mit $|w_0| \leqq |w_1|$ ist eine ganze algebraische Zahl α, deren Konjugierte Beträge haben, die den Wert Eins nicht überschreiten[6]).

Beweis von Satz II. Wir setzen voraus, daß die Näherungsbrüche $\frac{u_n}{v_n}$ die Eigenschaft A besitzen. Aus der Ungleichung

$$|u_{n+1} - \alpha u_n| < \frac{C_4}{|u_n|^\varepsilon} \tag{13}$$

werden wir ableiten, daß die Potenzreihe

$$f(\zeta) = u_0 + u_1 \zeta + \cdots + u_n \zeta^n + \cdots \tag{14}$$

eine rationale Funktion der komplexen Veränderlichen ζ darstellt. Daraus wird sich ergeben, daß α eine ganze algebraische Zahl ist, die den Ungleichungen (7) des Hilfssatzes 1 genügt.

Zuerst zeigen wir: *Aus der Ungleichung* (13) *folgt das Vorhandensein einer Zahl* $\delta > 1$ *und einer Konstanten* C_{15}, *so daß*

$$|u_{n+1} - \alpha u_n| < \frac{C_{15}}{\delta^n} \tag{15}$$

für alle n *gilt.*

Da es unendlich viele verschiedene Näherungsbrüche $\frac{u_n}{v_n}$ gibt, ist $|u_n|$ nicht beschränkt; es gibt daher einen Index m, so daß

$$|u_m| > \frac{C_4}{\alpha - 1}. \tag{16}$$

Dann ist

$$|u_{m+1}| > \alpha |u_m| - \frac{C_4}{|u_m|^\varepsilon} \geqq \alpha |u_m| - C_4 = |u_m| \left(\alpha - \frac{C_4}{|u_m|}\right) > |u_m|.$$

Die Zahl u_{m+1} erfüllt also auch die Ungleichung (16) und durch vollständige Induktion nach n schließen wir, daß dann für alle $n \geqq m$

$$|u_n| > \frac{C_4}{\alpha - 1}$$

gilt, und die $|u_n|$ mit n wachsen. Man hat daher

$$|u_{n+1}| > |u_n| \left(\alpha - \frac{C_4}{|u_n|}\right) > |u_n| \left(\alpha - \frac{C_4}{|u_m|}\right).$$

---

[6]) Siehe zu dieser Vermutung auch [3]).

Setzen wir noch

$$\alpha - \frac{C_4}{|u_m|} = \beta,$$

so ist nach (16)

$$\beta > 1$$

und es wird für $n \geqq m$

$$|u_{n+1}| > \beta |u_n| > \cdots > \beta^{n+1-m} |u_m|.$$

Es gibt somit eine Konstante C_{16}, so daß für alle n

$$|u_n| > C_{16} \beta^n$$

gilt. Tragen wir diese Abschätzung in die Ungleichung (13), so erhalten wir die gesuchte Ungleichung (15), wenn wir $\delta = \beta_s > 1$ setzen.

Untersuchung der Potenzreihe (14). Wir setzen

$$\varphi_{n+1} = u_{n+1} - \alpha u_n.$$

Durch Multiplikation der Potenzreihe (14) mit $1 - \alpha\zeta$ erhält man

$$(1 - \alpha\zeta) f(\zeta) = u_0 + \varphi_1 \zeta + \cdots + \varphi_n \zeta^n + \cdots$$

Die Ungleichung (15) zeigt, daß diese Reihe für $|\zeta| < \delta$ konvergiert, also ist $f(\zeta)$ im Kreise $|\zeta| < \delta$ fortsetzbar und regulär bis auf einen einfachen Pol im Punkte $\zeta = \frac{1}{\alpha}$. Borel [7]) hat aber bewiesen: *Eine analytische Funktion, die eine Potenzreihenentwicklung mit rational-ganzzahligen Koeffizienten um den Nullpunkt besitzt und meromorph ist in einem Kreise* $|\zeta| < \delta$ *mit* $\delta > 1$, *ist eine rationale Funktion, deren Zähler und Nenner ganze rationale Koeffizienten haben.* Fatou [8]) hat noch gezeigt, daß das konstante Glied des Nenners Eins ist, daß also alle Nullstellen des Nenners reziproke Werte von ganzen algebraischen Zahlen sind. Nach diesen Sätzen ist daher $f(\zeta)$ eine rationale Funktion. Im Kreise $|\zeta| < \delta$ hat $f(\zeta)$ nur einen einfachen Pol im Punkte $\zeta = \frac{1}{\alpha}$. Die Zahl α ist also ganz algebraisch. Bezeichnen $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$ die Konjugierten von α, so sind $\frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_s}$ auch einfache Nullstellen des Nenners von $f(\zeta)$, sie müssen also im Gebiet $|\zeta| \geqq \delta$ liegen; folglich gelten die Ungleichungen $|\alpha_r| \leqq \frac{1}{\delta} < 1$ für $r = 2, \ldots, s$, und die ganze algebraische Zahl α genügt den Ungleichungen (7).

Bestimmung von u_n. Um u_n zu berechnen, zerlegen wir die rationale Funktion $f(\zeta) - \frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)}$ in Partialbrüche. $Q(\zeta)$ kann keine anderen Nullstellen

[7]) Borel, Bull. Sci. math. **18** (1894), S. 22–25.

[8]) Fatou, Acta math. **30** (1906), S. 369–371. Ein Beweis wird auch S. 317 dieser Abhandlung gegeben.

als $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_s}$ haben, denn sonst wäre $Q(\zeta)$ in Faktoren zerlegbar, von denen einer nur Wurzeln hätte mit Beträgen, die mindestens so groß wie δ wären. Ihre reziproken Werte wären ganze algebraische Zahlen und der Betrag ihrer Norm kleiner als Eins, also Null. Diese Zahlen wären somit Null, und würden also in $Q(\zeta)$ nicht auftreten. Man hat daher, mit gewissen Konstanten, $\lambda, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$:

$$f(\zeta) = \frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)} = \frac{\lambda}{1-\alpha\zeta} + \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2\zeta} + \cdots + \frac{\lambda_s}{1-\alpha_s\zeta},$$

und zwar ist

$$\lambda = -\frac{P\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\frac{1}{\alpha}Q'\left(\frac{1}{\alpha}\right)}, \qquad \lambda_r = -\frac{P\left(\frac{1}{\alpha_r}\right)}{\frac{1}{\alpha_r}Q'\left(\frac{1}{\alpha_r}\right)} \quad \text{für } r = 2, \ldots, s.$$

λ gehört folglich zum Körper von α, und $\lambda_2, \ldots, \lambda_s$ sind die Konjugierten von λ. Wird jetzt jeder Partialbruch einzeln in eine Potenzreihe entwickelt, so erhalten wir durch Identifizieren mit der Potenzreihe (14) für $f(\zeta)$

$$u_n = \lambda\alpha^n + \lambda_2\alpha_2^n + \cdots + \lambda_s\alpha_s^n.$$

Schätzung des Grades s von α. Aus dem Ausdruck für u_n leiten wir wie im Beweis von Satz I ab, daß es eine Konstante C_{17} gibt, so daß

$$|u_n| > C_{17}\,\alpha^n.$$

Tragen wir dies in die Ungleichung (13), so folgt daraus, daß

$$|\varphi_{n+1}| = |u_{n+1} - \alpha u_n| < \frac{C_{18}}{\alpha^{\varepsilon n}}.$$

Der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$(1-\alpha\zeta)f(\zeta) = u_0 + \varphi_1\zeta + \cdots + \varphi_n\zeta^n + \cdots$$

ist daher mindestens α^ε; andererseits wissen wir aber, daß er genau den Wert $\frac{1}{|\alpha_2|}$ hat, wenn wieder $|\alpha_2| \geqq |\alpha_r|$ für $r = 3, \ldots, s$ ist. Es ist also

$$\alpha^\varepsilon \leqq \frac{1}{|\alpha_2|}.$$

Bezeichnen wir mit ε' den Exponenten für den $|\alpha_2| = \frac{1}{\alpha^{\varepsilon'}}$, so ist $\varepsilon \leqq \varepsilon'$. Da wir aber schon bewiesen haben, daß $\varepsilon' \leqq \frac{1}{s-1}$, so wird

$$s \leqq 1 + \frac{1}{\varepsilon'} \leqq 1 + \frac{1}{\varepsilon}.$$

Schluß des Beweises von Satz II. Aus der Ungleichung

$$|v_{n+1} - \alpha v_n| < \frac{C_{\mathfrak{h}}}{|v_n|^{\varepsilon}}$$

folgt in gleicher Weise, daß es eine Zahl μ des Körpers von α gibt, so daß

$$v_n = \mu\,\alpha^n + \mu_2\,\alpha_2^n + \cdots + \mu_s\,\alpha_s^n.$$

Da $\alpha > 1$ und $|\alpha_r| < 1$ für $r = 2, \ldots, s$, strebt $\frac{u_n}{v_n}$ mit wachsendem n nach $\frac{\lambda}{\mu}$. Somit erhalten wir $\xi = \frac{\lambda}{\mu}$, also ist ξ algebraisch.

Man hat noch

$$u_n - \xi\,v_n = u_n - \frac{\lambda}{\mu}\,v_n = \left(\lambda_2 - \frac{\lambda}{\mu}\,\mu_2\right)\alpha_2^n + \cdots + \left(\lambda_s - \frac{\lambda}{\mu}\,\mu_s\right)\alpha_s^n,$$

folglich ist

$$|u_n - \xi\,v_n| < \frac{C_{19}}{|v_n|^{\varepsilon'}} \leqq \frac{C_6}{|v_n|^{\varepsilon}},$$

denn $\varepsilon \leqq \varepsilon'$. Die Näherungsbrüche $\frac{u_n}{v_n}$ besitzen also auch die Eigenschaft B; man sieht dadurch, daß diese Eigenschaft sich aus der Eigenschaft A ergibt, somit nicht von ihr unabhängig ist.

Bemerkung. In diesem Beweis hätten wir den Satz von Borel durch einen Satz von A. Thue[9]) ersetzen können, der sich zwar aus dem Borelschen Satze ableiten läßt, aber von Thue anders bewiesen wurde. Dieser Satz lautet: *Es seien λ, α zwei reelle Zahlen, u_n die an $\lambda\alpha^n$ am nächsten liegende ganze rationale Zahl. Gibt es zwei Zahlen $\delta > 1$ und C_{20}, so daß für alle n*

$$|\lambda\,\alpha^n - u_n| < \frac{C_{20}}{\delta^n}$$

ist, so ist α algebraisch. Diese Bemerkung wird uns die Erweiterung von Satz II in zwei verschiedenen Richtungen ermöglichen.

Besitzt eine Folge von ganzen rationalen Zahlen $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ die Eigenschaft A, dann gibt es einen Index m, so daß

$$|u_{n+1} - \alpha\,u_n| < \tfrac{1}{2} \qquad \text{für } n \geqq m$$

wird. Es ist also u_{n+1} die an αu_n am nächsten liegende ganze Zahl, und die Folge der u_n ist somit für $n \geqq m$ leicht berechenbar. Im allgemeinen ist es aber umständlich, diesen Index m zu bestimmen. Im folgenden Satz III werden wir nun unter den Zahlen α eine Klasse auszeichnen, für welche $m = 0$ ist. Mit Hilfe dieser Zahlen, die wir mit ϱ bezeichnen, wird also die Ermittlung der Näherungsbrüche $\frac{u_n}{v_n}$ einer algebraischen Zahl ξ mit den Eigenschaften A und B nur einfache Rechnungen erfordern; es ist somit unsere Forderung in der Einleitung weitgehend erfüllt. Wir werden das Verfahren auch geometrisch deuten.

---

[9]) Thue, Norske Vid. Selsk. Skr. (1912—2) Nr. 20 (15 S.).

Satz III. *In jedem reellen algebraischen Zahlkörper gibt es Zahlen ϱ mit folgender Eigenschaft:*

Bildet man, von zwei ganzen rationalen Zahlen $u_0 \neq 0$ und $v_0 \neq 0$ ausgehend, zwei Folgen von Zahlen u_n und v_n nach folgender Vorschrift:

Vorschrift C. *Für alle $n \geqq 0$ ist u_{n+1} die an ϱu_n, und v_{n+1} die an ϱv_n am nächsten liegende ganze rationale Zahl, also*

$$|u_{n+1} - \varrho u_n| < \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad |v_{n+1} - \varrho v_n| < \tfrac{1}{2} \qquad \text{für } n \geqq 0. \tag{17}$$

Dann bilden $\frac{u_n}{v_n}$ eine Folge von Näherungsbrüchen einer algebraischen Zahl ξ des Körpers von ϱ mit den Eigenschaften A *und* B *(wobei ϱ die Zahl α vertritt). Jede Zahl des Körpers kann auf diese Weise mit Hilfe der gleichen Zahl ϱ erhalten werden.*

Die Folgen u_n und v_n sind durch die Vorschrift C eindeutig bestimmt, denn wie wir gleich zeigen werden, ist ϱ eine erzeugende Zahl des Körpers, also irrational, und somit niemals

$$|u_{n+1} - \varrho u_n| = \tfrac{1}{2} \quad \text{oder} \quad |v_{n+1} - \varrho v_n| = \tfrac{1}{2}.$$

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich aus folgendem Hilfssatz:

Hilfssatz 2: *Es sei ϱ eine ganze algebraische Zahl, ϱ_r für $r = 2, \ldots, s$ ihre Konjugierten, und sie genüge der Ungleichung:*

$$\prod_{r=2}^{s} (1 + |\varrho_r|) \leqq 2. \tag{18}$$

a) *In jedem reellen algebraischen Zahlkörper gibt es solche Zahlen ϱ.*

b) *Es sei $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ eine Folge von ganzen rationalen Zahlen, die nach der Vorschrift C aus u_0 gebildet ist. Dann ist jeder Zahl $u_0 \neq 0$ eine Zahl $\lambda \neq 0$ des Körpers von ϱ so zugeordnet, daß*

$$u_n = \lambda \varrho^n + \lambda_2 \varrho_2^n + \cdots + \lambda_s \varrho_s^n$$

gilt.

Beweis von a). Wir bemerken zuerst, daß aus der Ungleichung (18) folgt, daß jede Zahl ϱ eine Zahl α ist, folglich ist sie eine erzeugende Zahl des Körpers. In den Körpern vom zweiten Grade ist sogar umgekehrt auch jede Zahl α eine Zahl ϱ, denn aus $|\alpha_2| < 1$ folgt $1 + |\alpha_2| < 2$. In den anderen Körpern kann man das Vorhandensein solcher Zahlen ϱ mit der gleichen Methode wie im Hilfssatz 1 nachweisen. Man kann aber auch für ϱ eine ganzzahlige Potenz α^m einer Zahl α wählen. Die Konjugierten von α^m sind die Zahlen α_r^m für $r = 2, \ldots, s$; sie streben also mit wachsendem m nach Null, und man kann die Ungleichung (18) erfüllen, wenn man m genügend groß wählt.

Beweis von b). Es sei

$$\varrho^s + a_1 \varrho^{s-1} + \cdots + a_s = 0 \tag{19}$$

die irreduzible Gleichung mit ganz-rationalen Koeffizienten, der ϱ genügt. Wir setzen

$$\varphi_{n+1} = u_{n+1} - \varrho u_n$$

und errechnen daraus, daß:

$$u_{n+r} = \varphi_{n+r} + \varrho\,\varphi_{n+r-1} + \cdots + \varrho^{r-1}\varphi_{n+1} + \varrho^r u_n.$$

Bilden wir nun die ganze rationale Zahl

$$w_n = u_{n+s} + a_1 u_{n+s-1} + \cdots + a_s u_n,$$

so wird, unter Berücksichtigung von (19),

$$\begin{aligned}(20)\quad w_n &= \varphi_{n+s} + (\varrho + a_1)\varphi_{n+s-1} + \cdots + (\varrho^{s-1} + a_1\varrho^{s-2} + \cdots + a_{s-1})\varphi_{n+1} \\ &= \varphi_{n+s} + \theta_1\varphi_{n+s-1} + \cdots + \theta_{s-1}\varphi_{n+1},\end{aligned}$$

wobei wir für $r = 1, 2, \ldots, s-1$

$$\theta_r = \varrho^r + a_1\varrho^{r-1} + \cdots + a_r$$

gesetzt haben. Es gilt folgende Identität in ζ:

$$(\zeta - \varrho)(\zeta^{s-1} + \theta_1\zeta^{s-2} + \cdots + \theta_{s-1}) = \zeta^s + a_1\zeta^{s-1} + \cdots + a_s.$$

Daraus ersehen wir, daß die θ_r die elementarsymmetrischen Funktionen der $s-1$ Zahlen $\varrho_2, \ldots, \varrho_s$ sind. Es ist folglich

$$\begin{aligned}1 + |\theta_1| + \cdots + |\theta_{s-1}| &= 1 + |\varrho_2 + \cdots + \varrho_s| + \cdots + |\varrho_2 \ldots \varrho_s| \\ &\leqq \prod_{r=2}^{s} (1 + |\varrho_r|) \leqq 2.\end{aligned}$$

Aus der Bedingung (17)

$$|u_{n+1} - \varrho u_n| = |\varphi_{n+1}| < \tfrac{1}{2} \qquad \text{für alle } n \geqq 0$$

folgt nun in (20):

$$|w_n| < \tfrac{1}{2}(1 + |\theta_1| + \cdots + |\theta_{s-1}|) \leqq 1.$$

Die ganze rationale Zahl w_n verschwindet also für alle n, das heißt aber, die Zahlen u_n genügen der linearen Rekursion

$$(21)\qquad u_{n+s} + a_1 u_{n+s-1} + \cdots + a_s u_n = 0.$$

Betrachten wir wieder die Potenzreihe in ζ

$$f(\zeta) = u_0 + u_1\zeta + \cdots + u_n\zeta^n + \cdots,$$

so wird

$$(1 + a_1\zeta + \cdots + a_s\zeta^s) f(\zeta) = P(\zeta),$$

wobei $P(\zeta)$ ein Polynom mit rational-ganzzahligen Koeffizienten ist, dessen Grad $s-1$ nicht überschreitet, denn die Koeffizienten der höheren Potenzen von ζ verschwinden alle nach (21). Es ist somit $f(\zeta)$ eine rationale Funktion

von ζ, deren Pole in den Punkten $\frac{1}{\varrho}, \frac{1}{\varrho_2}, \ldots, \frac{1}{\varrho_s}$ liegen. Wie beim Beweis von Satz II entnimmt man dieser Tatsache, daß

$$u_n = \lambda \varrho^n + \lambda_2 \varrho_2^n + \cdots + \lambda_s \varrho_s^n,$$

wo $\lambda \neq 0$ eine Zahl des Körpers von ϱ bedeutet und $\lambda_2, \ldots, \lambda_s$ ihre Konjugierten.

Aus der erhaltenen Formel für u_n schließen wir wie im Beweis von Satz I, daß

$$|u_{n+1} - \varrho u_n| < \frac{C_{21}}{|u_n|^\varepsilon}.$$

Der Exponent ε ist die schon eingeführte Größe, für die $|\varrho_2|\varrho^\varepsilon = 1$ ist, wenn $|\varrho_2|$ die größte der Zahlen $|\varrho_2|, \ldots, |\varrho_s|$ bedeutet. Da ϱ eine Zahl α des Hilfssatzes 1 ist, so gilt

$$\varepsilon \leqq \frac{1}{s-1}.$$

Man kann aber auch $\varrho = \alpha^m$ wählen mit geeignetem m; in diesem Falle ist ε mit dem entsprechenden Exponenten für α identisch. Es gibt also auch Zahlen ϱ, für die ε beliebig nahe an $\frac{1}{s-1}$ gewählt werden kann.

Schluß des Beweises von Satz III. Betrachten wir nun zwei Folgen $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ und $v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots$, die nach der Vorschrift C aus den Zahlen $u_0 \neq 0$ und $v_0 \neq 0$ entstehen. Nach Hilfssatz 2 sind ihnen zwei Zahlen $\lambda \neq 0$ und $\mu \neq 0$ des Körpers von ϱ so zugeordnet, daß

$$u_n = \lambda \varrho^n + \lambda_2 \varrho_2^n + \cdots + \lambda_s \varrho_s^n,$$
$$v_n = \mu \varrho^n + \mu_2 \varrho_2^n + \cdots + \mu_s \varrho_s^n,$$

somit genügen dann die Folgen u_n und v_n den schärferen Ungleichungen

$$|u_{n+1} - \varrho u_n| < \frac{C_{21}}{|u_n|^\varepsilon} \quad \text{und} \quad |v_{n+1} - \varrho v_n| < \frac{C_{22}}{|u_n|^\varepsilon}.$$

Der Bruch $\frac{u_n}{v_n}$ strebt mit wachsendem n nach $\frac{\lambda}{\mu} = \xi$, also nach einer algebraischen Zahl, die dem Körper von ϱ angehört. Für die Schärfe der Annäherung gilt die Ungleichung

$$|u_n - \xi v_n| < \frac{C_{23}}{|v_n|^\varepsilon}.$$

Die Näherungsbrüche $\frac{u_n}{v_n}$ besitzen daher die Eigenschaften A und B.

Umgekehrt sei ξ eine beliebige Zahl des Körpers von ϱ. Man kann immer ξ als Quotient $\frac{\lambda}{\mu}$ zweier ganzen Zahlen λ und μ des Körpers darstellen, die außerdem den Ungleichungen

$$|\lambda_2(\varrho - \varrho_2)| + \cdots + |\lambda_s(\varrho - \varrho_s)| < \tfrac{1}{2},$$
$$|\mu_2(\varrho - \varrho_2)| + \cdots + |\mu_s(\varrho - \varrho_s)| < \tfrac{1}{2} \quad (22)$$

genügen. Bezeichnen wir nämlich mit λ', μ' zwei ganze Zahlen des Körpers für die $\xi = \frac{\lambda'}{\mu'}$ gilt. Die Konjugierten der Zahl $\lambda' \varrho^m$ sind dann die Zahlen $\lambda'_r \varrho_r^m$, wo $r = 2, \ldots, s$; diejenigen von $\mu' \varrho^m$ sind die Zahlen $\mu'_r \varrho_r^m$ für $r = 2, \ldots, s$. Mit wachsendem Exponenten m streben diese Konjugierten nach Null, und man kann m so bestimmen, daß die Ungleichungen

$$|\lambda'_2 \varrho_2^m (\varrho - \varrho_2)| + \cdots + |\lambda'_s \varrho_s^m (\varrho - \varrho_s)| < \tfrac{1}{2},$$
$$|\mu'_2 \varrho_2^m (\varrho - \varrho_2)| + \cdots + |\mu'_s \varrho_s^m (\varrho - \varrho_s)| < \tfrac{1}{2}$$

gelten. Die ganzen algebraischen Zahlen $\lambda = \lambda' \varrho^m$ und $\mu = \mu' \varrho^m$ erfüllen dann die Bedingungen (22), und es ist $\xi = \frac{\lambda'}{\mu'} = \frac{\lambda}{\mu}$. Die Zahlen

$$u_n = \lambda \varrho^n + \lambda_2 \varrho_2^n + \cdots + \lambda_s \varrho_s^n,$$
$$v_n = \mu \varrho^n + \mu_2 \varrho_2^n + \cdots + \mu_s \varrho_s^n$$

sind ganz rational, und es ist

$$u_{n+1} - \varrho u_n = \lambda_2 (\varrho_2 - \varrho) \varrho_2^n + \cdots + \lambda_s (\varrho_s - \varrho) \varrho_s^n,$$
$$v_{n+1} - \varrho v_n = \mu_2 (\varrho_2 - \varrho) \varrho_2^n + \cdots + \mu_s (\varrho_s - \varrho) \varrho_s^n.$$

Die Ungleichungen (22) zeigen uns dann, daß

$$|u_{n+1} - \varrho u_n| < \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad |v_{n+1} - \varrho v_n| < \tfrac{1}{2}$$

für alle $n \geqq 0$ gilt. Die Folgen u_n und v_n entstehen also aus u_0 und v_0 durch die Vorschrift C, und die Quotienten $\frac{u_n}{v_n}$ sind Näherungsbrüche von ξ, welche die Eigenschaften A und B besitzen.

Geometrische Konstruktion der Näherungsbrüche. In einer Ebene betrachten wir das Gitter der Punkte mit rational-ganzzahligen Koordinaten in bezug auf ein rechtwinkliges Achsensystem OX, OY. In dieser Ebene zeichnen wir die Geraden G und G', deren Gleichungen $Y = \varrho X$ und $Y = \frac{1}{\varrho} X$ lauten. Von einem Gitterpunkt u_0 auf OX ausgehend, ziehen wir die Parallele zu OY bis zum Gitterpunkt, der am nächsten an G liegt; von diesem Punkte aus ziehen wir die Parallele zu OX bis zum Gitterpunkt, der am nächsten an G' liegt, und wiederholen diese Konstruktion ins Unendliche. Auf diese Weise erhalten wir einen unendlichen Streckenzug K, der aus den Strecken K_0, $K_1, \ldots, K_n, \ldots$ zusammengesetzt ist, die abwechselnd parallel zu OY und OX sind. Es sei L, bestehend aus den Strecken $L_0, L_1, \ldots, L_n, \ldots$, der Streckenzug, der auf entsprechende Weise von dem Gitterpunkt v_0 auf OY ausgeht, wo wir aber mit L_0 parallel zu OX beginnen. Die Strecken mit gleichem Index K_n und L_n stehen dann senkrecht aufeinander; sie oder ihre Verlängerungen schneiden sich in Gitterpunkten, deren Koordinaten wir mit u_n, v_n bezeichnen wollen, und zwar soll u_n für gerades n die Abszisse und für ungerades n die Ordinate des Punktes bedeuten. Satz III lehrt uns dann, daß

sich die erhaltenen Gitterpunkte u_n, v_n zwei Geraden $Y = \xi X$ und $Y = \frac{1}{\xi} X$ so nähern, daß

$$|u_n - \xi v_n| < \frac{C_{23}}{|v_n|^{\varepsilon}}.$$

Die Größe ξ ist eine algebraische Zahl des Körpers von ϱ, und jede algebraische Zahl dieses Körpers kann auf diese Weise mit Hilfe der gleichen Geraden G und G' angenähert werden.

Wenn der Körper vom zweiten Grade ist, erhalten wir die besten Näherungen, wenn wir für ϱ eine Einheit wählen, dann tritt uns der Fall der Kettenbruchnäherungen wieder entgegen. Wir kommen sogar hier mit einer einzigen Zahl ϱ für alle Zahlen des Körpers aus. Das kommt daher, daß wir die für die Kettenbruchnäherungen gültige Ungleichung

$$|u_n - \xi v_n| < \frac{1}{|v_n|}$$

durch die etwas weniger fordernde Bedingung

$$|u_n - \xi v_n| < \frac{C_{23}}{|v_n|}$$

ersetzt haben.

Wir hatten angedeutet, daß der Beweis von Satz II sich entweder auf den Beweis von Thue oder auf denjenigen von Borel stützen konnte, die von verschiedenen Grundgedanken ausgehen. Diese beiden Richtungen können nun ausgebaut und wesentlich verschärft werden; sie führen so zu zwei verschiedenen Erweiterungen Satz IV a) und Satz IV b) von Satz II, der in beiden Sätzen enthalten ist. Wir werden die Beweise von den Sätzen IV a) und IV b) vollständig geben, so daß dadurch auch Satz II vollständig bewiesen ist, ohne daß die vorherige Kenntnis der Arbeiten von Thue oder Borel erforderlich ist. Satz IV lautet:

Satz IV. *Die reelle Zahl ξ besitze eine unendliche Folge von verschiedenen Näherungsbrüchen $\frac{u_n}{v_n}$. Wir setzen*

$$\varphi_{n+1} = u_{n+1} - \alpha u_n \quad \text{und} \quad \psi_{n+1} = v_{n+1} - \alpha v_n.$$

Die Zahl ξ ist algebraisch, wenn man eine Zahl $\alpha > 1$ so finden kann, daß eine von beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

a) *Es gilt zugleich*

$$|\varphi_n| \leqq \frac{1}{2\,e\,\alpha\,(1+\log|u_0|)}, \quad u_0 \neq 0 \quad \text{und} \quad |\psi_n| \leqq \frac{1}{2\,e\,\alpha\,(1+\log|v_0|)}, \quad v_0 \neq 0$$

für alle $n = 1, 2, \ldots$. Die Zahl e bedeutet die Basis der natürlichen Logarithmen. Der Grad von ξ kann die kleinste der beiden Größen $1 + \log|u_0|$ und $1 + \log|v_0|$ nicht überschreiten.

b) *Es gilt zugleich*

$$|\varphi_n|^2 + |\varphi_{n+1}|^2 + \cdots + |\varphi_{2n}|^2 \leqq \frac{1}{4\alpha^2}$$

und

$$|\psi_n|^2 + |\psi_{n+1}|^2 + \cdots + |\psi_{2n}|^2 \leqq \frac{1}{4\alpha^2}$$

für alle genügend großen n, also für alle $n \geqq m$.

Beweis von Satz IVa). Wir zeigen zunächst, daß aus der Ungleichung

$$|\varphi_n| \leqq \frac{1}{2e\alpha(1+\log|u_0|)} \qquad \text{für } n = 1, 2, \ldots \tag{23}$$

folgt, daß α eine ganze algebraische Zahl ist, für deren Konjugierten $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$ die Ungleichungen

$$|\alpha_r| \leqq 1 \qquad \text{für } r = 2, \ldots, s \tag{24}$$

gelten. Hierzu genügt es zu zeigen, daß für die u_n eine lineare Rekursion mit ganzen Koeffizienten besteht. Wie wir beim Beweis vom Hilfssatz 2 gesehen haben, stellt nämlich dann die schon dort betrachtete Potenzreihe

$$f(\zeta) = u_0 + u_1\zeta + \cdots + u_n\zeta^n + \cdots \tag{25}$$

eine rationale Funktion von ζ dar, deren Zähler und Nenner ganz-rationale Koeffizienten besitzen. Da nach (23) der Ausdruck $|u_{n+1} - \alpha u_n|$ beschränkt ist, so hat $f(\zeta)$ im Kreise $|\zeta| < 1$ nur einen einfachen Pol im Punkte $\zeta = \frac{1}{\alpha}$. Nach dem Satz von Fatou ist daher α eine ganze algebraische Zahl und alle ihre Konjugierten liegen im Kreis $|\zeta| \leqq 1$, genügen also den Ungleichungen (24). Auf dem Kreis $|\zeta| = 1$ können aber Nullstellen des Nenners von $f(\zeta)$ liegen, die zu $\frac{1}{\alpha}$ nicht konjugiert sind; wir bezeichnen solche Nullstellen mit $\frac{1}{\alpha_h}$, wobei $h \geqq s+1$. Die Zahlen α_h mit $h \geqq s+1$ sind auch ganz algebraisch; die Beträge ihrer Konjugierten können den Wert Eins nicht überschreiten. Aus den Ungleichungen

$$1 \leqq |\text{Norm } \alpha_h| \leqq 1$$

folgt, daß α_h und alle Konjugierten den Betrag Eins haben; diese Zahlen α_h sind also Einheitswurzeln und liegen alle auf dem Kreis $|\zeta| = 1$. Sie können eventuell auch mehrfache Nullstellen des Nenners sein; mit α_h für $h = s+1, \ldots, l$ bezeichnen wir dann die verschiedenen unter ihnen.

Mit noch unbestimmten ganzen rationalen Zahlen $k, b_0, b_1, \ldots, b_k$ bilden wir die ganze rationale Zahl

$$w_n = b_0 u_{n+k} + b_1 u_{n+k-1} + \cdots + b_k u_n.$$

Wir bezeichnen mit b eine obere Schranke für alle $|b_0|, |b_1|, \ldots, |b_k|$ und mit φ eine obere Schranke für alle $|\varphi_n|$. Wir wollen nun zeigen:

Bestimmt man die Zahlen $b_0, b_1, \ldots, b_k$ *so, daß* $w_0 = 0$, *und ist*

$$\varphi < \frac{1}{(k+1)\,b},$$

so folgt daraus $w_n = 0$ *für alle* $n \geqq 0$.

Beweis. Wir schließen durch vollständige Induktion nach n. Nehmen wir an, daß schon $w_n = 0$ bewiesen ist, dann wird

$$w_{n+1} = w_{n+1} - \alpha w_n = b_0 \varphi_{n+k+1} + b_1 \varphi_{n+k} + \cdots + b_k \varphi_{n+1},$$

also

$$|w_{n+1}| \leqq (k+1)\,b\,\varphi < 1.$$

Da aber w_{n+1} ganz rational ist, muß $w_{n+1} = 0$ sein.

Wir wollen nun untersuchen, wie wir $w_0 = 0$ erhalten können. Dazu zeigen wir:

Für jedes $k \geqq 1$ *kann man ganze rationale* $b_0, b_1, \ldots, b_k$ *so finden, daß* $w_0 = 0$, *wenn die obere Schranke* b *der Zahlen* $|b_0|, |b_1|, \ldots, |b_k|$ *und die obere Schranke* φ *der Zahlen* $|\varphi_1|, |\varphi_2|, \ldots, |\varphi_n|, \ldots$ *den Ungleichungen*

$$b \geqq 2\,\alpha\,|u_0|^{\frac{1}{k}} - 1 \quad \textit{und} \quad \varphi < \frac{1}{(k+1)\,b}$$

genügen.

Beweis. Wir benützen das Dirichletsche Schubfachprinzip. Wir betrachten alle Ausdrücke von der Form

$$w_0' = b_0' |u_k| + b_1' |u_{k-1}| + \cdots + b_k' |u_0|,$$

wo die b_r' nichtnegative ganze rationale Zahlen mit

$$0 \leqq b_r' \leqq b \qquad \text{für } r = 0, 1, \ldots, k$$

bedeuten. Solche Ausdrücke gibt es genau $(b+1)^{k+1}$. Für jeden wird

$$w_0' \leqq b(|u_k| + |u_{k-1}| + \cdots + |u_0|). \tag{26}$$

Aus

$$|\varphi_r| = |u_r - \alpha u_{r-1}| \leqq \varphi$$

schließt man durch vollständige Induktion nach r, daß

$$|u_r| \leqq \alpha^r \left(|u_0| + \frac{r\varphi}{\alpha}\right) \leqq \alpha^k \left(|u_0| + \frac{r\varphi}{\alpha}\right) \qquad \text{für } r \leqq k.$$

Wir erhalten somit aus (26)

$$w_0' \leqq b\,\alpha^k \left\{(k+1)\,|u_0| + \frac{k(k+1)\,\varphi}{2\,\alpha}\right\}.$$

Da aber

$$\varphi < \frac{1}{(k+1)\,b},$$

so folgt daraus

$$w_0' < (k+1)\, b\, \alpha^k |u_0| + (k+1)\, \alpha^k \frac{k}{2\alpha(k+1)} < (k+1)(b+1)\, \alpha^k |u_0| - 1,$$

denn

$$\frac{k}{2\alpha(k+1)} < \frac{1}{2} < 1 - \frac{1}{(k+1)\,\alpha^k} \leqq |u_0| - \frac{1}{(k+1)\,\alpha^k}.$$

Ist nun die Anzahl der Ausdrücke w_0' größer als die Anzahl der Werte, die von der ganzen rationalen Zahl w_0' angenommen werden können, so gibt es zwei verschiedene Systeme nichtnegativer ganzen Zahlen b_0', b_1', ..., b_k' und b_0'', b_1'', ..., b_k'', so daß

$$b_0' |u_k| + b_1' |u_{k-1}| + \cdots + b_k' |u_0| = b_0'' |u_k| + b_1'' |u_{k-1}| + \cdots + b_k'' |u_0|.$$

Dann ist

$$(b_0' - b_0'') |u_k| + (b_1' - b_1'') |u_{k-1}| + \cdots + (b_k' - b_k'') |u_0| = 0.$$

Die Koeffizienten der $|u_r|$ sind hier nicht alle Null, und ihre Beträge überschreiten nicht die Schranke b. Durch geeignete Vorzeichenänderung folgt daraus das Vorhandensein eines Ausdruckes

$$w_0 = b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \cdots + b_k u_0 = 0,$$

wobei $|b_r| \leqq b$ für $r = 0, 1, \ldots, k$ ist.

Die Anzahl der Ausdrücke w_0' ist aber $(b+1)^{k+1}$, diejenige der Zahlenwerte, die w_0' annehmen kann, ist kleiner als $(b+1)(k+1)\,\alpha^k |u_0|$. Es gibt also einen Ausdruck w_0, der den Wert Null hat, wenn

$$(b+1)^{k+1} \geqq (b+1)(k+1)\,\alpha^k |u_0|, \tag{27}$$

also wenn

$$b + 1 \geqq (k+1)^{\frac{1}{k}}\, \alpha\, |u_0|^{\frac{1}{k}}.$$

Aber

$$(k+1)^{\frac{1}{k}} \leqq 2 \qquad \text{für } k \geqq 1,$$

die Ungleichung (27) ist daher sicher erfüllt, wenn

$$b + 1 \geqq 2\,\alpha\, |u_0|^{\frac{1}{k}}$$

gilt, und unsere Behauptung ist erwiesen.

Wir zeigen nun:

Wenn die ganze Zahl k den Ungleichungen

$$\log |u_0| < k \leqq 1 + \log |u_0|$$

genügt, so ist

$$(k+1)|u_0|^{\frac{1}{k}} < e\,(1 + \log |u_0|).$$

Die Zahl e ist die Basis der natürlichen Logarithmen.

Beweis. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem OX, OY betrachten wir die Kurve H, deren Gleichung

$$Y = 1 + \log(1 + X) \tag{H}$$

lautet. Die Gerade D, die der Gleichung

$$Y = \frac{1}{k} X + \log(k + 1) \tag{D}$$

genügt, schneidet H, wie man sofort sieht, für $X = k$. Für $X = k - 1$ ist aber

$$\frac{1}{k}(k-1) + \log(k+1) < 1 + \log(1 + k - 1),$$

denn

$$\log(k+1) = \log k + \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) < \log k + \frac{1}{k}.$$

Der Punkt $X = k - 1$ von D liegt also unter dem entsprechenden Punkt von H. Aber H ist nach unten konkav, somit liegt im ganzen Intervall $k - 1 \leqq X < k$ die Gerade D unter der Kurve H. Anders ausgedrückt: Für

$$X < k \leqq 1 + X$$

gilt

$$\frac{1}{k} X + \log(k+1) < 1 + \log(1 + X).$$

Setzen wir hier $X = \log|u_0|$, so gilt für

$$\log|u_0| < k \leqq 1 + \log|u_0|$$

die Ungleichung

$$\frac{1}{k}\log|u_0| + \log(k+1) < 1 + \log(1 + \log|u_0|)$$

oder

$$(k+1)\,|u_0|^{\frac{1}{k}} < e\,(1 + \log|u_0|).$$

Schluß des Beweises von Satz IVa). Es sei nun

$$\varphi \leqq \frac{1}{2\,e\,\alpha\,(1 + \log|u_0|)}.$$

Wir wählen eine ganze Zahl k, die durch die Ungleichungen

$$\log|u_0| < k \leqq 1 + \log|u_0|$$

bestimmt ist, dann wird

$$\varphi < \frac{1}{2\,\alpha\,(k+1)\,|u_0|^{\frac{1}{k}}}.$$

Es sei b diejenige ganze Zahl, die den Ungleichungen

$$2\,\alpha\,|u_0|^{\frac{1}{k}} - 1 \leqq b < 2\,\alpha\,|u_0|^{\frac{1}{k}}$$

genügt, dann ist

$$\varphi < \frac{1}{(k+1)\,b}.$$

Alle Zwischensätze werden anwendbar, und es ist somit bewiesen, daß α eine ganze algebraische Zahl ist, deren Grad s den Wert $k \leqq 1 + \log|u_0|$ nicht überschreiten kann und deren Konjugierte den Ungleichungen $|\alpha_r| \leqq 1$ für $r = 2, \ldots, s$ genügen. Für die Folge u_n gilt die lineare Rekursion

$$b_0\,u_{n+k} + b_1 u_{n+k-1} + \cdots + b_k\,u_n = 0. \tag{28}$$

Es ist also

$$Q(\zeta) = b_0 + b_1\zeta + \cdots + b_k\,\zeta^k$$

der Nenner der durch die Potenzreihe (25) dargestellten rationalen Funktion. Die Wurzeln von $Q(\zeta) = 0$ sind die Zahlen $\frac{1}{\alpha}$ und $\frac{1}{\alpha_r}$ für $r = 2, \ldots, l$. Die Zahlen $\frac{1}{\alpha_h}$ für $h = s+1, \ldots, l$ sind die eventuell auch als mehrfache Wurzeln von $Q(\zeta) = 0$ auftretenden Einheitswurzeln. Die Methode, die wir in Satz II benützt haben, zeigt uns, daß die Lösung der Rekursion (28) auf die Form

$$u_n = \lambda\,\alpha^n + \lambda_2\,\alpha_2^n + \cdots + \lambda_s\,\alpha_s^n + \alpha_{s+1}^n P_{s+1}(n) + \cdots + \alpha_l^n P_l(n)$$

gebracht werden kann. Hierbei ist λ eine algebraische Zahl des Körpers von α und $P_h(n)$ für $h = s+1, \ldots, l$ bezeichnet ein Polynom in n, dessen Grad kleiner als die Vielfachheit der Wurzel $\frac{1}{\alpha_h}$ von $Q(\zeta) = 0$ ist. Wir wollen nun zeigen, daß der Grad dieser Polynome Null sein muß, also:

Die Polynome $P_h(n)$ für $h = s+1, \ldots, l$ reduzieren sich auf Konstanten λ_h. Es sei $g \geqq 0$ der höchste Grad der Polynome $P_h(n)$, der für $h = s+1, \ldots, l$ wirklich vorkommt. Bezeichnen wir mit λ_h den Koeffizienten von n^g in $P_h(n)$, so verschwinden für $h = s+1, \ldots, l$ nicht alle λ_h. Es wird

$$\varphi_{n+1} = u_{n+1} - \alpha\,u_n = \lambda_2(\alpha_2 - \alpha)\,\alpha_2^n + \cdots + \lambda_s(\alpha_s - \alpha)\,\alpha_s^n + \sigma_n,$$

wobei

$$\sigma_n = \{\alpha_{s+1}P_{s+1}(n+1) - \alpha P_{s+1}(n)\}\,\alpha_{s+1}^n + \cdots + \{\alpha_l P_l(n+1) - \alpha P_l(n)\}\,\alpha_l^n.$$

Der Koeffizient von n^g in σ_n ist

$$\lambda_{s+1}(\alpha_{s+1} - \alpha)\,\alpha_{s+1}^n + \cdots + \lambda_l(\alpha_l - \alpha)\,\alpha_l^n. \tag{29}$$

Dieser Koeffizient nimmt unendlich oft einen von Null verschiedenen Wert η an. Betrachten wir nämlich folgendes Gleichungssystem für $\lambda_{s+1}(\alpha_{s+1} - \alpha)$, $\ldots$, $\lambda_l(\alpha_l - \alpha)$:

$$\begin{aligned}
&\lambda_{s+1}(\alpha_{s+1} - \alpha) + \cdots + \lambda_l(\alpha_l - \alpha) = 0\\
&\lambda_{s+1}(\alpha_{s+1} - \alpha)\,\alpha_{s+1} + \cdots + \lambda_l(\alpha_l - \alpha)\,\alpha_l = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\lambda_{s+1}(\alpha_{s+1} - \alpha)\,\alpha_{s+1}^{l-s-1} + \cdots + \lambda_l(\alpha_l - \alpha)\,\alpha_l^{l-s-1} = 0.
\end{aligned} \tag{30}$$

Die Determinante der Koeffizienten ist von Null verschieden, da wir $\alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_l$ verschieden voneinander vorausgesetzt haben. Das System hat also nur die Lösung

$$\lambda_{s+1}(\alpha_{s+1} - \alpha) = \cdots = \lambda_l(\alpha_l - \alpha) = 0.$$

Aber auch α ist von allen α_h mit $h = s+1, \ldots, l$ verschieden, denn $\alpha > 1$ und $|\alpha_h| = 1$; somit wäre $\lambda_{s+1} = \cdots = \lambda_l = 0$, was wir ausgeschlossen hatten. Mindestens eine der Größen (30) ist folglich eine von Null verschiedene Zahl η. Es gibt also einen Exponenten c mit $0 \leqq c < l - s$, so daß

$$\lambda_{s+1}(\alpha_{s+1} - \alpha)\,\alpha_{s+1}^c + \cdots + \lambda_l(\alpha_l - \alpha)\,\alpha_l^c = \eta \neq 0.$$

Da die Zahlen $\alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_l$ Einheitswurzeln sind, gibt es einen Exponenten d, so daß für alle $h = s+1, \ldots, l$

$$\alpha_h^d = 1$$

gilt. Der Ausdruck (29) nimmt also den Wert η an für alle Exponenten von der Form

$$n = dt + c,$$

wo t eine beliebige nichtnegative rationale ganze Zahl ist. Für diese Werte von n wird daher σ_n unendlich groß, wenn $g \geqq 1$. Die Summe

$$\lambda_2(\alpha_2 - \alpha)\,\alpha_2^n + \cdots + \lambda_s(\alpha_s - \alpha)\,\alpha_s^n = \varphi_{n+1} - \sigma_n$$

bleibt aber beschränkt. Aus den Voraussetzungen von Satz IV a) folgt auch, daß $|\varphi_{n+1}|$ beschränkt ist. Wir haben somit einen Widerspruch, wenn $g > 0$, folglich ist $g = 0$ und u_n hat die Form

$$u_n = \lambda\,\alpha^n + \lambda_2\,\alpha_2^n + \cdots + \lambda_s\,\alpha_s^n + \lambda_{s+1}\,\alpha_{s+1}^n + \cdots + \lambda_l\,\alpha_l^n.$$

In gleicher Weise folgt aus der Bedingung

$$|\psi_n| < \frac{1}{2\,e\,\alpha\,(1 + \log|v_0|)} \qquad \text{für alle } n \geqq 1,$$

daß es Zahlen $\mu, \mu_2, \ldots, \mu_f$ gibt, so daß

$$v_n = \mu\,\alpha^n + \mu_2\,\alpha_2^n + \cdots + \mu_s\,\alpha_s^n + \mu_{s+1}\,\alpha_{s+1}'^n + \cdots + \mu_f\,\alpha_f'^n,$$

wobei μ dem Körper von α angehört und $f \geqq s$. Die Zahlen α_h' für $h = s+1, \ldots, f$ sind etwaige vorkommende Einheitswurzeln, und es ist $f \leqq k' \leqq 1 + \log|v_0|$. Da α die einzige Zahl ist, deren Betrag größer als Eins ist, so streben die Brüche $\frac{u_n}{v_n}$ mit wachsendem n dem Grenzwert $\frac{\lambda}{\mu}$ zu; folglich ist $\xi = \frac{\lambda}{\mu}$ eine algebraische Zahl des Körpers von α, und Satz IV a) ist bewiesen.

Beweis von Satz IV b). Es genügt wieder zu zeigen, daß die Bedingung

$$|\varphi_n|^2 + |\varphi_{n+1}|^2 + \cdots + |\varphi_{2n}|^2 \leqq \frac{1}{4\,\alpha^2} \qquad \text{für } n > m \tag{31}$$

das Bestehen einer linearen Rekursion mit ganzen rationalen Koeffizienten

$$b_0 u_{n+k} + b_1 u_{n+k-1} + \cdots + b_k u_n = 0 \tag{32}$$

bedingt. Schreiben wir diese Rekursion (32) für $k+1$ aufeinanderfolgende Werte von n, so ergibt sich, daß die Determinanten

$$d_k^{(n)} = \begin{vmatrix} u_n & u_{n+1} & \cdots & u_{n+k} \\ u_{n+1} & u_{n+2} & \cdots & u_{n+k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{n+k} & u_{n+k+1} & \cdots & u_{n+2k} \end{vmatrix}$$

für alle n verschwinden. Umgekehrt folgt aus dem Verschwinden der Determinanten $d_k^{(n)}$ für alle n, daß alle Gleichungen (32) auflösbar sind in rationalen, also auch in ganzen rationalen Zahlen $b_0, b_1, \ldots, b_k$, die nicht alle verschwinden.

Zum Beweis wollen wir annehmen, daß k die kleinste Zahl ist, für die

$$d_k^{(n)} = 0 \qquad \text{für alle } n = 0, 1, \ldots.$$

Es ist dann $d_{k-1}^{(0)} \neq 0$. Bildet man nämlich die Determinante der Unterdeterminanten der vier Eckelemente von $d_k^{(n)}$, so erhält man nach einer bekannten Laplaceschen Formel die Beziehung

$$d_{k-1}^{(n)} d_{k-1}^{(n+2)} - (d_{k-1}^{(n+1)})^2 = d_k^{(n)} d_{k-2}^{(n+2)}. \tag{33}$$

Aus dieser Formel schließt man, unter Berücksichtigung von $d_k^{(n)} = 0$, daß aus $d_{k-1}^{(h)} = 0$ folgt $d_{k-1}^{(h+1)} = 0$ und, falls $h \geqq 2$, auch $d_{k-1}^{(h-1)} = 0$. Wäre also $d_{k-1}^{(0)} = 0$, so würden auch alle anderen Determinanten $d_{k-1}^{(n)}$ verschwinden, das aber widerspricht der Wahl von k. Die gleiche Schlußweise zeigt uns noch, daß die Determinanten $d_{k-1}^{(n)}$ für $n \geqq 1$ entweder sämtlich verschwinden oder sämtlich von Null verschieden sind.

Wir wollen zuerst den Fall untersuchen, wo alle $d_{k-1}^{(n)} \neq 0$. Für jeden Wert von $n = 0, 1, \ldots$ hat das System

$$\begin{aligned} b_0 u_{n+k} &+ b_1 u_{n+k-1} + \cdots + b_k u_n &&= 0 \\ b_0 u_{n+k+1} &+ b_1 u_{n+k} + \cdots + b_k u_{n+1} &&= 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_0 u_{n+2k-1} &+ b_1 u_{n+2k-2} + \cdots + b_k u_{n+k-1} &&= 0 \end{aligned}$$

eine Lösung in ganzen rationalen Zahlen $b_0, b_1, \ldots, b_k$, und es ist $b_0 \neq 0$ und $b_k \neq 0$, weil $d_{k-1}^{(n)} \neq 0$ und $d_{k-1}^{(n+1)} \neq 0$. Formt man mit Hilfe dieser Gleichungen die Determinante $d_k^{(n)}$ um, so ergibt sich

$$0 = d_k^{(n)} = \frac{1}{b_0} (b_0 u_{n+2k} + b_1 u_{n+2k-1} + \cdots + b_k u_{n+k}) d_{k-1}^{(n)}.$$

Es ist also

$$b_0 u_{n+2k} + b_1 u_{n+2k-1} + \cdots + b_k u_{n+k} = 0,$$

und die Zahlen $b_0, b_1, \ldots, b_k$ sind auch Lösungen für das System, das dem Werte $n+1$ entspricht; folglich sind $b_0, b_1, \ldots, b_k$ von n unabhängig, das heißt die Folge u_n genügt einer Rekursion (32).

Betrachten wir nun den Fall, daß alle $d_{k-1}^{(n)}$ für $n \geqq 1$ verschwinden. Das System

$$\begin{aligned} b_0 u_k &+ b_1 u_{k-1} + \cdots + b_k u_0 = 0 \\ b_0 u_{k+1} &+ b_1 u_k + \cdots + b_k u_1 = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_0 u_{2k-1} &+ b_1 u_{2k-2} + \cdots + b_k u_{k-1} = 0 \end{aligned}$$

läßt für b_k nur die Lösung $b_k = 0$ zu, denn $d_{k-1}^{(0)} \neq 0$ und $d_{k-1}^{(1)} = 0$. In der Rekursion tritt folglich u_0 überhaupt nicht auf. Die Determinanten $d_{k-1}^{(n)}$, die aus der Folge $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ gebildet werden, verschwinden aber alle, somit sind wir für diese Folge auf die Anfangsaufgabe zurückgeführt mit einem kleineren Wert für k. Da aber unendlich viele u_n nicht verschwinden, erhalten wir auf diese Weise nach endlich vielen Schritten eine Folge, für die der erste Fall vorliegt. Es gibt also auch in diesem Falle eine Rekursion (32) für alle u_n mit $n = 0, 1, \ldots$, aber einige der letzten Koeffizienten $b_k, b_{k+1}, \ldots$ verschwinden.

Satz von Fatou. *Ist k die kleinste Zahl, für welche die Determinanten $d_k^{(n)}$ alle verschwinden und sind die Zahlen u_n alle ganz rational, so kann man in der Rekursion* (32) $b_0 = 1$ *nehmen.* Wegen der Bedeutung dieses Satzes für unsere Theorie wollen wir der Vollständigkeit halber auch diesen Beweis hier bringen.

Beweis. Aus den Voraussetzungen des Satzes folgt, daß $d_{k-1}^{(0)} \neq 0$; wir können also ganze rationale Zahlen $y_1, \ldots, y_k$, die nicht alle verschwinden, so bestimmen, daß die Zahlen

$$z_n' = y_1 u_n + y_2 u_{n+1} + \cdots + y_k u_{n+k-1}$$

für $n = 0, 1, \ldots, k-2$ verschwinden. Haben alle Zahlen z_n' gemeinsame Teiler, so sei z der größte unter ihnen, sonst setzen wir $z = 1$. Die Zahlen

$$z_n = \frac{z_n'}{z} = \frac{1}{z}(y_1 u_n + y_2 u_{n+1} + \cdots + y_k u_{n+k-1})$$

sind dann ganz rational und haben keinen von 1 verschiedenen gemeinsamen Teiler; sie genügen auch der Rekursion (32). Es sei p ein Primfaktor von b_0 und es sei z_q die erste Zahl der Reihe $z_0, z_1, \ldots, z_n, \ldots$, die nicht durch p teilbar ist. Dann ist $q \geqq k-1$ und (32) mit z_n für $n = q-(k-1)$ angewandt, gibt

$$b_1 z_q = -(b_0 z_{q+1} + b_2 z_{q-1} + \cdots + b_k z_{q-k+1}).$$

Jeder Summand in der Klammer ist durch p teilbar; da z_q es nicht ist, so ist b_1 durch p teilbar. Wenden wir nun (32) mit z_n für $n = q-(k-2)$ an, so wird

$$b_2 z_q = -(b_0 z_{q+2} + b_1 z_{q+1} + b_3 z_{q-1} + \cdots + b_k z_{q-k+2}).$$

Da auch b_1 durch p teilbar ist, ist wieder jeder Summand der Klammer durch p teilbar, also auch b_2. Man schließt auf diese Weise der Reihe nach, daß p alle Zahlen $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_k$ teilt. Man kann also jeden von Eins verschiedenen Primfaktor von b_0 aus (32) wegdividieren, und daraus folgt unsere Behauptung.

Kroneckersches Determinantenkriterium [10]). Nach Kronecker ist für das Bestehen einer linearen Rekursion für die u_n notwendig und hinreichend, daß die Determinanten $d_n^{(0)}$ für alle $n \geqq k$ verschwinden. Es leuchtet ohne weiteres ein, daß die Bedingung notwendig ist, denn alle $d_k^{(n)}$ verschwinden. Die Bedingung ist auch hinreichend; aus der Determinantenrelation (33) schließt man nämlich durch vollständige Induktion nach h, daß aus $d_n^{(0)} = 0$ für $n \geqq k$ folgt $d_n^{(h)} = 0$ für $n \geqq k$, und daher $d_k^{(h)} = 0$ für alle $h = 0, 1, \ldots$.

Anwendung auf den Beweis. Wir werden zeigen, daß aus der Bedingung (31) folgt, daß die Determinanten $d_n^{(0)}$ für wachsendes n nach Null streben. Da sie aber ganze rationale Zahlen sind, ergibt sich daraus das Vorhandensein einer Zahl k, so daß $d_n^{(0)} = 0$ für $n \geqq k$.

Die Beziehung

$$u_{n+1} - \alpha u_n = \varphi_{n+1}$$

gestattet uns die Determinante $d_n^{(0)}$ auf folgende Weise umzuformen:

$$d_n^{(0)} = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \ldots & u_n \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_n & u_{n+1} & \ldots & u_{2n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_0 & \varphi_1 & \ldots & \varphi_n \\ u_1 & \varphi_2 & \ldots & \varphi_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_n & \varphi_{n+1} & \ldots & \varphi_{2n} \end{vmatrix}.$$

Nach einem Satz von Hadamard [11]) gilt aber die Ungleichung

$$(d_n^{(0)})^2 \leqq (|u_0|^2 + |u_1|^2 + \cdots + |u_n|^2) \prod_{k=1}^{n} (|\varphi_k|^2 + |\varphi_{k+1}|^2 + \cdots + |\varphi_{k+n}|^2).$$

Wir wollen nun obere Schranken für alle Klammerausdrücke ermitteln. Es sei n so groß gewählt, daß $n \geqq m$.

Zuerst betrachten wir die Zahlen h, die den Ungleichungen $m \leqq h \leqq n$ genügen. Die Reihe der $n+1$ aufeinanderfolgenden Indizes $h, h+1, \ldots, h+n$ spalten wir in $f+1$ Abschnitte, die jeweils mit den Zahlen $h, 2h, \ldots, 2^f h$ beginnen, wobei f der Ungleichung

$$2^f h \leqq h + n < 2^{f+1} h \tag{34}$$

genügt. Aus der Bedingung (31) ergibt sich dann die Ungleichung

$$|\varphi_h|^2 + |\varphi_{h+1}|^2 + \cdots + |\varphi_{h+n}|^2 \leqq (f+1)\frac{1}{4\alpha^2}.$$

[10]) Kronecker, Monatsber. Akad. Berlin 1881, S. 566—567; Ges. Abh. **2**, S. 146 bis 149. Siehe auch: Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie **2** (1927), S. 314 bis 315. Berlin.

[11]) Hadamard, Bull. Sci. math. **17** (1893), S. 240—246.

Nach (34) ist aber

$$f \leqq \frac{1}{\log 2} \log \frac{h+n}{h} = \frac{1}{\log 2} \log \left(2 + \frac{n-h}{h}\right) \leqq 1 + \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{n-h}{2h} < 1 + \frac{n-h}{h} = \frac{n}{h}.$$

Es wird daher

$$\prod_{h=m}^{n} (|\varphi_h|^2 + |\varphi_{h+1}|^2 + \cdots + |\varphi_{h+n}|^2) < \frac{1}{(2\alpha)^{2n+2-2m}} \prod_{h=1}^{n} \left(1 + \frac{n}{h}\right)$$
$$= (2\alpha)^{2m-2} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{(2\alpha)^{2n}}.$$

Die Stirlingsche Formel für Fakultäten und die Tatsache, daß der Exponent $2m-2$ von n unabhängig ist, zeigen uns das Vorhandensein einer Konstanten C_{24}, so daß

$$(2\alpha)^{2m-2} \frac{(2n)!}{(n!)^2} < C_{24} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}.$$

Somit erhalten wir

$$\prod_{h=m}^{n} (|\varphi_h|^2 + |\varphi_{h+1}|^2 + \cdots + |\varphi_{h+n}|^2) < \frac{C_{24}}{\alpha^{2n}\sqrt{n}}. \tag{35}$$

Nun wollen wir uns den Zahlen h mit $1 \leqq h < m$ zuwenden. Wir setzen

$$|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + \cdots + |\varphi_{m-1}|^2 = C_{25} - \frac{1}{2\alpha^2}, \tag{36}$$

C_{25} ist von n unabhängig. Die Reihe $m, m+1, \ldots, h+n$ zerlegen wir wie vorhin in $g+1$ Abschnitte, die mit den Zahlen $m, 2m, \ldots, 2^g m$ beginnen, wobei g durch $2^g m \leqq h+n < 2^{g+1} m$ erklärt ist. Wie oben ist dann

$$|\varphi_m|^2 + |\varphi_{m+1}|^2 + \cdots + |\varphi_{h+n}|^2 \leqq \left(1 + \frac{1}{\log 2} \log \frac{h+n}{m}\right) \frac{1}{4\alpha^2}$$
$$< \left(1 + \frac{1}{\log 2} \log \frac{m+n}{m}\right) \frac{1}{4\alpha^2} \leqq \left(1 + \frac{1}{\log 2} \log 2n\right) \frac{1}{4\alpha^2}.$$

Da aber $\log 2 > \frac{1}{2}$ ist, erhält man

$$1 + \frac{1}{\log 2} \log 2n = 2 + \frac{1}{\log 2} \log n < 2 + 2 \log n.$$

Beachten wir noch (36), so wird für $1 \leqq h < m$

$$|\varphi_h|^2 + |\varphi_{h+1}|^2 + \cdots + |\varphi_{h+n}|^2 < C_{25} + \frac{1}{2\alpha^2} \log n < C_{25} + \log n$$

und

$$\prod_{h=1}^{m-1} (|\varphi_h|^2 + |\varphi_{h+1}|^2 + \cdots + |\varphi_{h+n}|^2) < (C_{25} + \log n)^{m-1}. \tag{37}$$

Endlich schätzen wir den Ausdruck $|u_0|^2 + |u_1|^2 + \cdots + |u_n|^2$. Es ist für $h \geqq m$

$$|u_h - \alpha u_{h-1}| = |\varphi_h| \leqq \frac{1}{2\alpha}.$$

Durch vollständige Induktion nach h erhält man

$$|u_h| \leqq \alpha^{h-m}|u_m| + \frac{1}{2\alpha}(1+\alpha+\cdots\alpha^{h-m-1}) < \alpha^{h-m}\left(|u_m| + \frac{1}{2\alpha(\alpha-1)}\right) \leqq C_{26}\alpha^h.$$

Für $h < m$ kann man eine feste Zahl C_{27} so bestimmen, daß

$$|u_h| \leqq C_{27}\,\alpha^h,$$

und es wird, wenn C_{28} die größte der beiden Zahlen C_{26}, C_{27} bezeichnet,

$$(38) \qquad |u_0|^2 + |u_1|^2 + \cdots + |u_n|^2 \leqq C_{28}(1+\alpha^2+\cdots+\alpha^{2n}) \leqq C_{29}\,\alpha^{2n}.$$

Durch Zusammenfassen der drei Ungleichungen (35), (37) und (38) erhält man

$$(d_n^{(0)})^2 < \frac{C_{24}}{\alpha^{2n}\sqrt{n}}(C_{25}+\log n)^{m-1}C_{29}\,\alpha^{2n} = C_{24}C_{29}\frac{(C_{25}+\log n)^{m-1}}{\sqrt{n}}.$$

Der Exponent $m-1$ ist aber auch eine von n unabhängige feste Zahl. Für wachsendes n strebt daher dieser letzte Ausdruck nach Null, und es gibt somit eine Zahl k, so daß $d_n^{(0)} = 0$ für $n \geqq k$.

Schluß des Beweises von Satz IV b). Wir haben somit gezeigt, daß aus der Bedingung (31) das Bestehen einer linearen Rekursion

$$u_{n+k} + b_1 u_{n+k-1} + \cdots + b_k u_n = 0$$

für die u_n erfolgt. Betrachten wir, wie im Beweis von Satz IV a), die Potenzreihe

$$f(\zeta) = u_0 + u_1\zeta + \cdots + u_n\zeta^n + \cdots,$$

so folgt aus der Rekursion, daß $f(\zeta)$ eine rationale Funktion von ζ ist, deren Nenner das Polynom

$$Q(\zeta) = 1 + b_1\zeta + \cdots + b_n\zeta^k$$

ist. Nach (31) ist $|\varphi_n|$ beschränkt, somit sieht man wie in Satz IV a), daß α eine ganze algebraische Zahl ist, deren Konjugierte $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$ den Ungleichungen (24), also $|\alpha_r| \leqq 1$ für $r = 2, \ldots, s$ genügen. Übrigens ist

$$\zeta^k + b_1\zeta^{k-1} + \cdots + b_k = 0$$

eine Gleichung, welche die Zahlen $\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ als Wurzeln besitzt; hat sie noch andere Wurzeln $\alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_l$, so haben wir gesehen, daß es Einheitswurzeln sind. Wie in Satz IV a) gilt dann

$$(39) \qquad u_n = \lambda\alpha^n + \lambda_2\alpha_2^n + \cdots + \lambda_s\alpha_s^n + \lambda_{s+1}\alpha_{s+1}^n + \cdots + \lambda_l\alpha_l^n,$$

wobei λ eine Zahl des Körpers von α ist. Aus der Bedingung

$$|\psi_n|^2 + |\psi_{n+1}|^2 + \cdots + |\psi_{2n}|^2 \leqq \frac{1}{4\alpha^2} \qquad \text{für } n \geqq m$$

folgt in gleicher Weise, daß

$$(40) \qquad v_n = \mu\alpha^n + \mu_2\alpha_2^n + \cdots + \mu_s\alpha_s^n + \mu_{s+1}\alpha_{s+1}'^n + \cdots + \mu_f\alpha_f'^n,$$

wo auch μ eine Zahl des Körpers von α ist und $\alpha'_{s+1}, \ldots, \alpha'_f$ etwaige vorkommende Einheitswurzeln bedeuten. Der Grenzwert ξ der Brüche $\frac{u_n}{v_n}$ ist also die algebraische Zahl $\frac{\lambda}{\mu}$ des Körpers von α und Satz IV b) ist bewiesen.

Aus den Formeln (39) und (40), die auch im Satz IV a) gelten, sieht man, daß die Näherungsbrüche $\frac{u_n}{v_n}$ nur dann die Eigenschaften A und B nicht besitzen, wenn unter den Zahlen $\alpha_2, \ldots, \alpha_l, \alpha'_{s+1}, \ldots, \alpha'_f$ solche vom Betrag Eins vorkommen; dann wird nämlich $\varepsilon = 0$ und wir können nur behaupten, daß $|\varphi_n|$, $|\psi_n|$ und $|u_n - \xi v_n|$ unter festen Schranken bleiben.

Zum Schluß unserer Betrachtungen wollen wir noch zeigen:

Satz II *ist ein Sonderfall sowohl von Satz* IV a), *wie von Satz* IV b). Wir hatten in Satz II aus der Eigenschaft A auf das Vorhandensein einer Zahl $\delta > 1$ geschlossen, so daß

$$|\varphi_n| < \frac{C_{30}}{\delta^n} \quad \text{und} \quad |\psi_n| < \frac{C_{31}}{\delta^n} \tag{41}$$

Betrachten wir zuerst die Voraussetzungen von Satz IV b). Aus (41) folgt, daß die unendlichen Reihen

$$|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + \cdots + |\varphi_n|^2 + \cdots \quad \text{und} \quad |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \cdots + |\psi_n|^2 + \cdots$$

konvergieren. Es gibt also eine Zahl m, so daß für $n \geqq m$

$$|\varphi_n|^2 + |\varphi_{n+1}|^2 + \cdots \leqq \frac{1}{4\alpha^2} \quad \text{und} \quad |\psi_n|^2 + |\psi_{n+1}|^2 + \cdots \leqq \frac{1}{4\alpha^2}.$$

Die Voraussetzungen von Satz IV b) sind folglich erfüllt.

Um Satz IV a) anzuwenden, müssen wir ihn etwas umformen, so daß nur die Indizes $n > m$ in Betracht kommen. Beginnen wir die Folgen u_n und v_n mit $n = m$, so lautet die Bedingung IV b)

$$|\varphi_n| \leqq \frac{1}{2e\alpha(1 + \log|u_m|)} \quad \text{und} \quad |\psi_n| \leqq \frac{1}{2e\alpha(1 + \log|v_m|)} \quad \text{für } n > m.$$

Aus der Eigenschaft A in Satz II folgt aber, wie wir gesehen haben, das Vorhandensein von Konstanten C_{32}, C_{33}, so daß

$$|u_m| < C_{32}\alpha^m \quad \text{und} \quad |v_m| < C_{33}\alpha^m.$$

Beachten wir noch (41), so sehen wir, daß unsere Bedingung IV b) sicher erfüllt ist, wenn

$$\frac{C_{30}}{\delta^n} \leqq \frac{1}{2e\alpha(1 + \log C_{32} + m\log\alpha)} \quad \text{und} \quad \frac{C_{31}}{\delta^n} \leqq \frac{1}{2e\alpha(1 + \log C_{33} + m\log\alpha)}$$
$$\text{für } n > m.$$

Das ist aber der Fall, wenn m groß genug gewählt ist. Wie in Satz II schließt man noch aus den Ungleichungen (41), daß keine der Zahlen α_r für $r \geqq 2$ den

Betrag Eins haben kann; somit besitzen die Näherungsbrüche $\frac{u_n}{v_n}$ die Eigenschaft B. Unsere Behauptung ist also bewiesen.

Unabhängigkeit der Bedingungen IV a) *und* IV b). Es stellt sich nun die Frage, ob die Bedingungen IV a) und IV b) wirklich voneinander verschieden sind. Gibt es eine Zahl $\theta > 0$, so daß alle φ_n der Ungleichung

$$\theta \leqq |\varphi_n| \leqq \frac{1}{2\,e\,\alpha\,(1 + \log|u_0|)}$$

genügen, so ist die Bedingung IV a) erfüllt, aber nicht die Bedingung IV b). Es müßte also Satz IV b) eine Folge von Satz IV a) sein.

Dies ist aber auch nicht der Fall. Die Bedingung IV b) für φ_n ist z. B. erfüllt, wenn

$$|\varphi_n| < \frac{3}{5\,\alpha\sqrt{n}} \qquad \text{für } n \geqq m_0.$$

Es wird dann nämlich

$$|\varphi_n|^2 + |\varphi_{n+1}|^2 + \cdots + |\varphi_{2n}|^2 < \frac{9}{25\,\alpha^2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right).$$

Der Ausdruck $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$ strebt aber mit wachsendem n nach $\log 2 < \frac{25}{36}$; somit wird für genügend große n

$$|\varphi_n|^2 + |\varphi_{n+1}|^2 + \cdots + |\varphi_{2n}|^2 \leqq \frac{9}{25\,\alpha^2} \cdot \frac{25}{36} = \frac{1}{4\,\alpha^2}.$$

Wenn nun eine Folge $|\varphi_n|$ beschränkt ist, so ergibt sich daraus das Vorhandensein einer Konstanten C_{34}, so daß

$$|u_m| > C_{34}\,\alpha^m,$$

somit ist

$$\frac{1}{2\,e\,\alpha\,(1 + \log|u_m|)} < \frac{1}{2\,e\,\alpha\,(1 + \log C_{34} + m\log\alpha)}.$$

Es gibt aber eine ganze Zahl m_0, so daß für alle $m \geqq m_0$

$$\frac{1}{2\,e\,\alpha\,(1 + \log C_{34} + m\log\alpha)} < \frac{3}{5\,\alpha\sqrt{m}}$$

gilt. Genügen nun die φ_n folgenden Ungleichungen

$$|\varphi_n| > \frac{1}{2\,e\,\alpha} \qquad \text{für } n < m_0$$

und

$$\frac{1}{2\,e\,\alpha\,(1 + \log C_{34} + n\log\alpha)} < |\varphi_n| < \frac{3}{5\,\alpha\sqrt{n}} \qquad \text{für } n \geqq m_0,$$

so ist die Bedingung IV b) erfüllt, aber die Bedingung IV a) für kein m.

Komplexe algebraische Zahlen. Es ist leicht einzusehen, daß sich diese Überlegungen auch auf komplexe algebraische Zahlen übertragen lassen. Zur bequemeren Übersicht haben wir es vorgezogen, uns zuerst auf die reellen

Zahlen zu beschränken. Wir wollen nun noch einige Bemerkungen zum Fall der komplexen Zahlen machen. Die ganzen Zahlen u_n, v_n werden wir dann sinngemäß einem imaginär-quadratischen Körper $\mathfrak{K}$ entnehmen. Adjungiert man dem Körper $\mathfrak{K}$ die komplexe algebraische Zahl s-ten Grades ξ, so erhält man einen Körper $\mathfrak{K}(\xi)$. Mit der Methode des Hilfssatzes 1 kann man in $\mathfrak{K}(\xi)$ das Vorhandensein von ganzen algebraischen Zahlen α vom Grade s über $\mathfrak{K}$ nachweisen, die mit ihren Konjugierten $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$ in bezug auf $\mathfrak{K}$ den Ungleichungen

$$|\alpha| > 1, \quad |\alpha_r| < 1 \qquad \text{für } r = 2, \ldots, s$$

genügen. Daraus ergibt sich der Satz I. Da der Borelsche Satz auch gilt für Potenzreihen, deren Koeffizienten ganze algebraische Zahlen eines imaginär-quadratischen Körpers $\mathfrak{K}$ sind, bleibt auch Satz II bestehen. Ebenso gilt Satz IV b), denn der Hadamardsche Determinantensatz sowie der Satz von Fatou bleiben auch für komplexe Elemente richtig. Einige Unterschiede gegenüber dem Fall der reellen Zahlen ξ treten in den Sätzen III und IV a) auf. Wird in Satz III die Vorschrift C so beibehalten, daß unter u_{n+1} die zu ϱu_n und unter v_{n+1} die zu ϱv_n am nächsten liegende ganze Zahl des Körpers $\mathfrak{K}$ verstanden wird, so sind die Zahlen ϱ, welche die im Satze geforderten Eigenschaften besitzen durch folgende Ungleichung erklärt:

$$\prod_{r=2}^{s} (1 + |\varrho_r|) \leqq \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{d+1}} & \text{für } d \not\equiv -1 \pmod 4, \\ \dfrac{4\sqrt{d}}{d+1} & \text{für } d \equiv -1 \pmod 4. \end{cases}$$

Hierbei bezeichnet d die kleinste positive ganze rationale Zahl für die $i\sqrt{d}$ eine erzeugende Zahl von $\mathfrak{K}$ ist. Es gibt somit nur Zahlen ϱ in den Körpern $\mathfrak{K}$ für die $d = 1, 2, 3, 7, 11$ ist, also in denjenigen Körpern $\mathfrak{K}$, in welchen ein Euklidischer Algorithmus existiert[12]). Satz IV a) gilt, wenn wir die oberen Schranken für $|\varphi_n|$ und $|\psi_n|$ des reellen Falles durch die Zahl ω dividieren, die durch $\omega = 4\sqrt{d}$ für $d \not\equiv -1 \pmod 4$ und $\omega = 2\sqrt{d+1}$ für $d \equiv -1 \pmod 4$ erklärt ist.

[12]) Dickson, Algebren und ihre Zahlentheorie, Zürich 1927, S. 150–152.

(Eingegangen am 31. Dezember 1941.)

Ein neues Verfahren der schrittweisen Näherungen zur Lösung von $y' = f(x, y)$.

Von

W. Quade in Karlsruhe.

Das Picardsche Verfahren der schrittweisen Näherungen liefert bekanntlich nicht nur einen Existenzbeweis, sondern ist auch zur praktischen Lösung der Differentialgleichung brauchbar[1]). Die bei ihm auftretende Funktionenfolge konvergiert sogar mit derselben Güte wie die Reihe der Exponentialfunktion. Unbefriedigend ist jedoch der Umstand, daß man nur ein verhältnismäßig kleines Intervall angeben kann, in welchem die Funktionenfolge konstruierbar ist und gegen die Lösung konvergiert. Nur bei speziellen Klassen von Differentialgleichungen ist es bisher gelungen, größere Konvergenzintervalle anzugeben[2]). Wenn man auch bei der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$, wie sich zeigen wird, durch eine schärfere Abschätzung im Picardschen Existenzbeweis zu einem Konvergenzintervall gelangen kann, das größer ist als die von E. Lindelöf angegebenen, so ist damit der eben erwähnte Mißstand immer noch nicht beseitigt. Eine weitere Schwäche des Picardschen Verfahrens ist darin zu sehen, daß bei ihm die Kurven der aufeinanderfolgenden Näherungsfunktionen weder ausschließlich oberhalb noch ausschließlich unterhalb der Lösungskurve verlaufen; es liefert also, abgesehen von besonderen Klassen von Differentialgleichungen, keine monotonen schrittweisen Näherungen.

Die eben erwähnten Schwächen vermeidet das im folgenden beschriebene neue Verfahren der schrittweisen Näherungen. Es liefert außer einem konstruktiven Existenzbeweis monotone Funktionenfolgen, welche die Lösung entweder von „oben“ oder von „unten“ her annähern und in einem weit größeren Intervall konvergieren als die Picardschen. Dabei werden keine weitergehenden Voraussetzungen über die rechte Seite der Differentialgleichung benötigt, als zur Führung des Picardschen Existenzbeweises erforderlich sind (Stetigkeit und Lipschitz-Bedingung).

Bei den bisher vorliegenden Untersuchungen über die Konstruktion monotoner Funktionenfolgen werden über $f(x, y)$ besondere Voraussetzungen

[1]) Vgl. z. B. L. Bieberbach, Theorie der Differentialgleichungen, 3. Aufl., Berlin 1930, S. 27 oder E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930, S. 53.

[2]) Vgl. hierzu M. Müller, Math. Zeitschr. 41 (1936), S. 163.

gemacht[3]). Das ist auch in der Abhandlung von F. Tóth der Fall, obgleich die dort beschriebenen Funktionenfolgen den hier benutzten nahestehen.

In einer Arbeit von N. W. Adamoff[4]) werden zwar keine Monotonievoraussetzungen über $f(x, y)$ gemacht, aber die dort benutzten Funktionenfolgen sind nicht, wie in der Arbeit behauptet wird, immer monoton.

Das neue Verfahren gründet sich auf die Methode der Ober- und Unterfunktionen, eine Methode[5]), welche schon O. Perron[6]) zur Führung eines Existenzbeweises benutzt hat.

Kurz das Wichtigste aus dem Inhalt der folgenden Untersuchungen. Aus einer schärferen Abschätzung des Unterschiedes zwischen Näherungsfunktion und Lösung wird ein neues Konvergenzintervall für das Picardsche Verfahren gewonnen. Nach einer kurzen Einführung in die Begriffe Ober- und Unterfunktion werden einige Verfahren zur Konstruktion solcher Funktionen beschrieben. Anschließend werden zwei grundlegende Sätze bewiesen, von denen der erste zeigt, wie man aus einer Ober-(Unter-)funktion eine verbesserte Ober-(Unter-)funktion gewinnen kann. Der zweite enthält eine Konstruktion, die aus einer Ober-(Unter-)funktion eine Unter-(Ober-)funktion erzeugt. Durch wiederholte Anwendung der in diesen beiden Sätzen beschriebenen Prozesse kann man Folgen von Ober- oder von Unterfunktionen konstruieren, oder Folgen, bei denen Ober- und Unterfunktionen abwechseln. Für alle diese Folgen werden Konvergenzintervalle bestimmt, in denen sie gleichmäßig gegen die Lösung konvergieren. An Hand verschiedener Beispiele wird gezeigt, daß einige dieser Folgen ein weit größeres Konvergenzintervall besitzen als die Picardschen. Des weiteren werden verschiedene Verfahren vorgeführt, mit deren Hilfe sich die Lösung durch eine Doppelfolge (diese enthält eine Folge von Ober- und eine solche von Unterfunktionen) einschachteln läßt. Schließlich wird nochmals das Picardsche Verfahren betrachtet und gezeigt, wie man sich auch bei diesem Folgen von Ober- und Unterfunktionen verschaffen und eine Einschachtelung der Lösung vornehmen kann. Am Schluß einige Ergebnisse über die Picardschen Funktionenfolgen, wie sie bei Monotonievoraussetzungen über $f(x, y)$ auftreten.

---

[3]) I. Bendixson, Ofversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897, S. 605; M. Müller, Math. Zeitschr. **26** (1927), S. 619; Sitzungsber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss., Math.-naturw. Klasse, 1927, 9. Abh., S. 31; M. Gayas, Bull. d. Sciences math. (2) **58** (1934), S. 236, vgl. hierzu das Referat von M. Müller, Jahrb. über d. Fortschr. d. Math. $\mathbf{60}_{\mathrm{I}}$ (1934), S. 374; F. Tóth, Mat. fiz. Sap. **48** (1941), S. 176.

[4]) N. W. Adamoff, Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS **18** (1938), S. 219, vgl. hierzu das Referat von M. Müller, Jahrb. über d. Fortschr. d. Math. $\mathbf{64}_{\mathrm{II}}$ (1938), S. 1126.

[5]) Vgl. hierzu M. Müller, Jahresber. d. Deutschen Math. Vereinigung **37** (1928), S. 41.

[6]) O. Perron, Math. Annalen **76** (1915), S. 471.

§ 1.

Verbessertes Konvergenzintervall des Picardschen Verfahrens.

Ausgangspunkt und Grundlage der folgenden Untersuchungen ist das Picardsche Verfahren der schrittweisen Näherungen. Es sei daher kurz an das Ergebnis des Picardschen Existenzbeweises erinnert, das wir hier in seiner einfachsten Form aussprechen.

Ist in der allgemeinen expliziten Differentialgleichung

(A) $$y' = f(x, y)$$

die Funktion $f(x, y)$ in dem rechteckigen Bereich

B: $$|x - x_0| \leqq a, \quad |y - y_0| \leqq b \qquad (a > 0,\ b > 0)$$

stetig, und ist für jedes Punktepaar (x, Y), (x, y) aus B

$$|f(x, Y) - f(x, y)| \leqq L|Y - y|,$$

wo L eine positive Zahl ist (Lipschitz-Konstante), dann besitzt die Gleichung (A) *für hinreichend nahe bei x_0 gelegene Werte x eine und nur eine mit stetiger Ableitung versehene Lösung $y = y(x)$, die für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt.*

E. Lindelöf hat zwei Intervalle angegeben, in denen die Konvergenz des Verfahrens der schrittweisen Näherungen gesichert ist. Das eine ist

J: $$|x - x_0| \leqq \delta,$$

wobei δ die kleinere der beiden positiven Zahlen a und $\frac{b}{M}$ ist; M ist der Maximalbetrag von $f(x, y)$ in B. Das andere, das größer als J sein kann, ist

J': $$|x - x_0| \leqq \delta',$$

wobei δ' die kleinere der beiden positiven Zahlen a und $\frac{1}{L}\log\left(1 + \frac{b\,L}{N}\right)$ ist; N ist der Maximalbetrag von $f(x, y_0)$ in B.

Im folgenden wird gezeigt, wie man durch eine schärfere Abschätzung zu einem Konvergenzintervall gelangen kann, das im allgemeinen größer ausfällt als die Intervalle J und J'. Zur Vereinfachung der Darstellung bedienen wir uns, wenn nichts anderes gesagt wird, der folgenden Vereinbarungen und Voraussetzungen:

1. Es werden nur reelle Funktionen reeller Veränderlicher betrachtet.
2. Mit B sei ein konvexer Bereich der x, y-Ebene bezeichnet, in welchem $f(x, y)$ erklärt und stetig ist, sowie in bezug auf y einer Lipschitz-Bedingung genügt; (x_0, y_0), der Punkt, durch welchen die Lösung von $y' = f(x, y)$ hindurchgehen soll, sei ein innerer Punkt von B, ausgenommen den Fall, daß B der rechteckige Bereich

$$x_0 \leqq x \leqq x_0 + a, \quad |y - y_0| \leqq b \qquad (a > 0,\ b > 0)$$

ist, wo (x_0, y_0) Randpunkt ist.

3. Es wird immer angenommen, daß $x \geqq x_0$ ist, da sich die entgegengesetzte Annahme durch die Substitution $x - x_0 = -x'$ auf die erste zurückführen läßt.
4. Unter $u_0(x)$ (gelegentlich auch mit anderer Bezeichnung) werde eine durch (x_0, y_0) gehende, in einem Intervall

$$I: \qquad x_0 \leqq x \leqq x_0 + a \qquad (a > 0)$$

erklärte und dort mit beschränkter integrierbarer Ableitung versehene Funktion verstanden; eine solche Funktion $u_0(x)$ nennen wir eine *geeignete Ausgangsfunktion.*
5. Rechter Endpunkt von I ist, wenn nichts anderes gesagt wird, die Abszisse des Punktes, in welchem die Kurve von $u_0(x)$ erstmals den Rand von B trifft (Fig. 1). Außer I wird noch ein Intervall

$$K: \qquad x_0 \leqq x \leqq x_0 + \delta \qquad (0 < \delta \leqq a)$$

benötigt, das meist die Rolle des Konvergenzintervalls einer Funktionenfolge spielen wird. I und K sind, wenn nichts anderes gesagt wird, abgeschlossene Intervalle.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir zum Verfahren der schrittweisen Näherungen nach Picard. Bei diesem konstruiert man von einer in einem Intervall I erklärten geeigneten Ausgangsfunktion $u_0(x)$ ausgehend die Funktionenfolge

$$u_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, u_{n-1}(t)]\, dt \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

und hat dann die Konvergenz der unendlichen Reihe

$$(1) \quad y = u_0 + (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \cdots$$

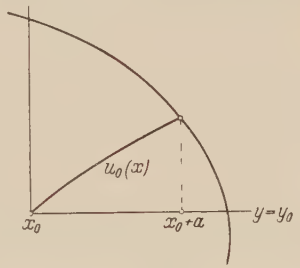

Fig. 1.

nachzuweisen, insbesondere ein Intervall K aufzusuchen, in welchem alle Funktionen u_n existieren. Die übliche Darstellung des aus diesem Verfahren fließenden Existenzbeweises wandeln wir etwas ab, indem wir den Begriff des „Fehlers" oder „Restes" einer Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ einführen.

Sind die Funktionen $y = u(x)$ und $f[x, u(x)]$ in einem Intervall erklärt und existiert dort $u'(x)$, dann nennen wir die Funktion

$$h(x) = u'(x) - f[x, u(x)]$$

den mit $u(x)$ gebildeten Fehler oder Rest der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$.

Aus dieser Erklärung des Fehlers folgt unmittelbar: Ist die Ableitung $u'(x)$ im Definitionsintervall beschränkt und integrierbar, dann gilt das Gleiche auch für den Fehler, vorausgesetzt, daß $f[x, u(x)]$ diese Eigenschaft

besitzt, was immer der Fall ist, wenn $f(x, y)$ im Definitionsbereich stetig ist. Fällt $u(x)$ mit einer Lösung von $y' = f(x, y)$ zusammen, dann verschwindet der Fehler identisch in x.

Nun zum Existenzbeweis. Der mit der geeigneten Ausgangsfunktion $u_0(x)$ gebildete Fehler

$$h_0(x) = u_0' - f(x, u_0)$$

ist in I beschränkt und integrierbar, und es ist

$$u_1 - u_0 = -\int_{x_0}^{x} h_0(t)\, dt.$$

Daher

$$|u_1 - u_0| \leqq \int_{x_0}^{x} |h_0(t)|\, dt.$$

Nehmen wir zunächst einmal an, daß es ein Intervall K gibt, in welchem alle u_n existieren, so folgt aus

$$u_2 - u_1 = \int_{x_0}^{x} [f(t, u_1) - f(t, u_0)]\, dt$$

auf Grund der Lipschitz-Bedingung

$$|u_2 - u_1| \leqq L \int_{x_0}^{x} |u_1 - u_0|\, dt \leqq L \int_{x_0}^{x} (x - t)|h_0(t)|\, dt.$$

Allgemein gilt, wie man durch vollständige Induktion bestätigt,

$$|u_n - u_{n-1}| \leqq L^{n-1} \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} |h_0(t)|\, dt \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Auf diese Weise erhält man die folgende Majorante der Reihe (1)

$$(2) \quad Y(x) = \int_{x_0}^{x} \left[1 + L(x - t) + \frac{L^2 (x-t)^2}{2!} + \cdots\right] |h_0(t)|\, dt = \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} |h_0(t)|\, dt.$$

Damit ist die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe (1) in K bewiesen. Ihre Summe $\lim_{n \to \infty} u_n(x) = y(x)$ ist eine stetige Funktion, welche in K durch die Folge der u_n gleichmäßig angenähert wird.

Um die Gültigkeit der Entwicklung zu sichern, haben wir noch ein Intervall K aufzusuchen, in welchem alle u_n existieren. Vergleich von (1) und (2) zeigt, daß für jede natürliche Zahl n

$$|u_n - u_0| \leqq Y.$$

Wir betrachten die Kurven der beiden Funktionen $V(x) = u_0 + Y$, $v(x) = u_0 - Y$, die beide durch (x_0, y_0) gehen, sowie den ebenfalls konvexen Bereich B', der aus B hervorgeht, indem man die rechts der Vertikalen $x = x_0 + a$ gelegenen Punkte von B wegläßt (Fig. 2). Da $V(x)$ und $v(x)$, solange sie in B' verlaufen, beschränkte integrierbare Ableitungen besitzen, trifft jede der beiden Kurven den Rand von B' erstmals in einem Punkte. Die kleinere der Abszissen der beiden Punkte ist dann gleich der Abszisse des rechten Endpunktes des Konvergenzintervalls K. Für alle u_n gilt in K

$$u_0 - Y \leqq u_n \leqq u_0 + Y.$$

In der üblichen Weise zeigt man nun noch, daß $\lim_{n \to \infty} u_n$ wegen der gleichmäßigen Konvergenz eine Lösung von $y' = f(x, y)$ ist, und daß dies, da $f(x, y)$ einer Lipschitz-Bedingung genügt, die einzige Lösung ist, welche die Differentialgleichung durch den Punkt (x_0, y_0) schickt. Damit ist der folgende Satz bewiesen:

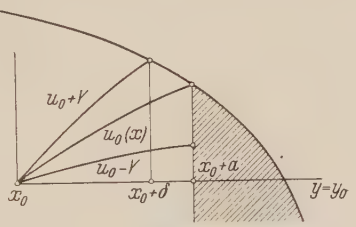

Fig. 2.

Satz 1. *Bildet man mit einer durch den Punkt (x_0, y_0) gehenden, in einem Intervall I erklärten, geeigneten Ausgangsfunktion $u_0(x)$ den Fehler*

$$h_0(x) = u_0' - f(x, u_0)$$

der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ und mit diesem das Integral

$$Y = \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} |h_0(t)| \, dt,$$

dann gibt es immer ein Intervall K, in welchem die Funktionen $u_0 + Y$ und $u_0 - Y$ existieren und in diesem existiert für die nach Picard *konstruierte Funktionenfolge*

$$u_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u_{n-1}) \, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

gleichmäßig $\lim_{n \to \infty} u_n(x) = y(x)$; diese Funktion stellt die einzige Lösung dar, welche die Differentialgleichung durch den Punkt (x_0, y_0) schickt.

Das für die Bestimmung des Konvergenzintervalls maßgebende Integral Y kann man dadurch beliebig klein machen, daß man eine hinreichend nahe bei der Lösung y verlaufende Ausgangsfunktion $u_0(x)$ nimmt. Daraus folgt, daß beim Picardschen Verfahren *die Länge des Konvergenzintervalls von der Güte der Annäherung abhängt, mit welcher die Ausgangsfunktion die Lösung approximiert*, und bei günstiger Ausgangsfunktion das Konvergenzintervall K größer ausfallen wird als die eingangs erwähnten Intervalle J und J'.

Ist der Bereich B rechteckig,

$$B: \qquad x_0 \leqq x \leqq x_0 + a, \quad |y - y_0| \leqq b \qquad (a > 0,\ b > 0),$$

und geht man bei der Bestimmung des Konvergenzintervalls von der besonderen Ausgangsfunktion $u_0(x) = y_0$ aus, dann ist der Fehler $h_0(x) = -f(x, y_0)$ und

$$Y = \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} |f(t, y_0)|\, dt.$$

Ist N der Maximalbetrag von $f(x, y_0)$ in B, dann gilt

$$Y \leqq \frac{N}{L} [e^{L(x-x_0)} - 1].$$

Ersetzt man bei der Bestimmung des Konvergenzintervalls Y durch die rechte Seite, so kommt man gerade auf das von E. Lindelöf angegebene Konvergenzintervall J'. Die Lindelöfsche Intervallbestimmung erweist sich somit als ein Sonderfall des hier beschriebenen allgemeineren Verfahrens.

Beispiel 1. Die durch den Anfangspunkt gehende Lösung der Riccatischen Gleichung $y' = x - y^2$ soll für hinreichend kleines positives x im Verfahren der schrittweisen Näherungen ermittelt werden. Als Bereich, in welchem die rechte Seite die Voraussetzungen des Picardschen Existenzbeweises erfüllt, nehmen wir den rechteckigen B: $0 \leqq x \leqq 2$, $|y| \leqq 1$. In B ist dann $L = 2$. Mit $M = 2$, dem Maximalbetrag von $f(x, y)$ in B, ergibt sich das Konvergenzintervall J: $0 \leqq x \leqq 0{,}5$; dagegen mit $L = 2$ und $N = 2$ das Intervall J': $0 \leqq x \leqq 0{,}34$, das hier kleiner als J ist.

Ein größeres Intervall liefert das eben beschriebene Verfahren. Mit der Ausgangsfunktion $u_0(x) = 0$ wird der Fehler $h_0(x) = -x$ und

$$Y = \int_0^x e^{2(x-t)}\, t\, dt = \tfrac{1}{4}(e^{2x} - 1 - 2x).$$

Der rechte Endpunkt von K ist derjenige Wert von x, für den Y erstmals den Wert 1 annimmt. Man findet so das Intervall

$$K: \qquad 0 \leqq x \leqq 0{,}97.$$

Auf ein noch größeres Intervall kommt man, wenn man von der die Lösung besser annähernden Funktion $u_0(x) = \frac{1}{2} x^2$ ausgeht. Man hat dann den Fehler $h_0(x) = \frac{x^4}{4}$ und

$$Y = \int_0^x e^{2(x-t)} \frac{t^4}{4}\, dt.$$

Von den beiden Funktionen $V(x) = \frac{1}{2} x^2 + Y$, $v(x) = \frac{1}{2} x^2 - Y$ erreicht V den Wert 1 für $x = 1{,}2$, während v für $0 \leqq x \leqq 1{,}2$ in B bleibt. Somit konvergiert das Picardsche Verfahren, wenn man von der Ausgangsfunktion $u_0(x) = \frac{1}{2} x^2$ ausgeht, im Intervall

$$K': \qquad 0 \leqq x \leqq 1{,}2.$$

§ 2.

Ober- und Unterfunktionen.

Beim Picardschen Verfahren der schrittweisen Näherungen kann man sich, wie wir gesehen haben, nur für ein kleineres Intervall der Konvergenz des Verfahrens versichern. Im folgenden wird ein neues Verfahren der schrittweisen Näherungen entwickelt, das ein ausgedehnteres Konvergenzintervall als das Picardsche besitzt und außerdem monotone Näherungen liefert. Es gründet sich auf die Begriffe Ober- und Unterfunktion einer Differentialgleichung, die schon O. Perron zur Führung eines Existenzbeweises für $y' = f(x, y)$ benutzt hat[7]). Bei der Bedeutung dieser Begriffe möge eine kurze Einführung in dieselben vorangeschickt werden, wobei die Perronschen Definitionen etwas abgeändert werden, um sie den Erfordernissen der folgenden Untersuchungen anzupassen[8]).

Erklärung. *Ist in den beiden Differentialgleichungen*

$$y' = f(x, y), \quad y' = F(x, y),$$

in der Umgebung des Punktes (x_0, y_0) *stets* $F(x, y) \geqq f(x, y)$ *— die Identität sei ausgeschlossen — und besitzt* $y' = F(x, y)$ *eine durch den Punkt* (x_0, y_0) *gehende, in einem Intervall* I *existierende Lösung, welche in* I *keine der durch* (x_0, y_0) *gehenden Lösungen von* $y' = f(x, y)$ *unter-(über-)schreitet, dann sagen wir, diese Lösung von* $y' = F(x, y)$ *sei in* I *eine Ober-(Unter-)funktion von* $y' = f(x, y)$.

Einen ersten Anhaltspunkt, unter welchen Bedingungen die Gleichung $y' = F(x, y)$ eine Oberfunktion von $y' = f(x, y)$ liefert, gibt der folgende

Hilfssatz. *Genügen die beiden in der Umgebung des Punktes* (x_0, y_0) *erklärten Funktionen* $f(x, y)$ *und* $F(x, y)$ *dort der Ungleichung* $f(x, y) < F(x, y)$, *und besitzt jede der beiden Differentialgleichungen* $y' = f(x, y)$ *und* $y' = F(x, y)$ *eine durch den Punkt* (x_0, y_0) *gehende in einem Intervall* I: $x_0 \leqq x \leqq x_0 + a$ $(a > 0)$ *existierende Lösung — diese Lösungen seien* $u(x)$ *und* $U(x)$ *— dann ist im links offenen Intervall* I

$$U(x) > u(x),$$

d. h. Vergrößerung (Verkleinerung) der rechten Seite der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ *führt für* $x > x_0$ *auf eine Ober-(Unter-)funktion, welche für* $x > x_0$ *immer ober-(unter-)halb jeder Lösung von* $y' = f(x, y)$ *verläuft.*

Wegen des Beweises dieses Hilfssatzes sei auf E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930, S. 82 verwiesen.

---

[7]) O. Perron, Math. Annalen **76** (1915), S. 471.

[8]) Vgl. hierzu auch die Darstellung bei E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930, S. 81.

Tritt in der Ungleichung $f < F$ zu dem Ungleichheitszeichen noch das Gleichheitszeichen — der Fall $f(x, y) \equiv F(x, y)$ sei, da er trivial ist, ausgeschlossen —, dann gilt der folgende

Satz 2. *Unterliegen die beiden in dem rechteckigen Bereich*

$$B: \qquad x_0 \leqq x \leqq x_0 + a, \quad |y - y_0| \leqq b \qquad (a > 0,\ b > 0)$$

erklärten stetigen Funktionen $f(x, y)$ und $F(x, y)$ überall in B der Bedingung

$$f(x, y) \leqq F(x, y), \quad (f(x, y) \geqq F(x, y)),$$

und sind $u(x)$ und $U(x)$ durch den Punkt (x_0, y_0) gehende im Intervall I: $x_0 \leqq x \leqq x_0 + a$ existierende und zwischen $y_0 - b$ und $y_0 + b$ verlaufende Lösungen der Differentialgleichungen

$$y' = f(x, y), \quad y' = F(x, y),$$

dann ist, wenn $F(x, y)$ in B einer Lipschitz-Bedingung genügt, in I stets

$$U(x) \geqq u(x), \quad (U(x) \leqq u(x)),$$

d. h. $U(x)$ ist eine Ober-(Unter-)funktion von $y' = f(x, y)$. Dabei wird $U(x)$ größer (kleiner) als $u(x)$, sobald $F[x, u(x)]$ erstmals größer (kleiner) als $f[x, u(x)]$ wird und bleibt dann größer (kleiner) als $u(x)$[9]).

Beweis. Wir führen den Beweis nur für den Fall $f \leqq F$ durch. Setzt man in

$$U' - u' = F(x, U) - f(x, u)$$

$U - u = z$, so folgt für z die Differentialgleichung

$$z' = F(x, u + z) - f(x, u);$$

denkt man sich auf der rechten Seite u als Funktion von x eingesetzt, so erhält man schließlich

$$z' = g(x, z).$$

Bringt man nunmehr die Differentialgleichung in die Form

$$z' - g(x, 0) = g(x, z) - g(x, 0),$$

wobei nach Voraussetzung $g(x, 0) \geqq 0$ ist (identisches Verschwinden ausgeschlossen), und nimmt man für den Augenblick an, daß $z \geqq 0$ ist, dann gilt auf Grund der Lipschitz-Bedingung

$$-Lz \leqq g(x, z) - g(x, 0) \leqq Lz,$$

[9]) Vgl. hierzu E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930, S. 91. Der eben ausgesprochene Satz folgt aus dem dort angegebenen allgemeineren Satz 5; jedoch kann infolge schärferer Voraussetzungen der Beweis des ersteren mit einfacheren Hilfsmitteln erbracht werden als der des letzteren.

also auch

$$-Lz \leqq z' - g(x, 0) \leqq Lz,$$

oder

$$z' + Lz \geqq g(x, 0), \qquad z' - Lz \leqq g(x, 0).$$

Nach der ersten der Ungleichungen genügt z einer linearen Differentialgleichung

$$z' + Lz = \varphi(x),$$

in welcher $\varphi(x) \geqq g(x, 0)$ ist. Die für $x = x_0$ verschwindende Lösung dieser Gleichung ist

$$z = \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)}\, \varphi(t)\, dt \geqq \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} g(t, 0)\, dt.$$

In entsprechender Weise ergibt sich aus der zweiten Ungleichung

$$z \leqq \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} g(t, 0)\, dt.$$

Daraus entnimmt man, daß $z(x)$ positiv wird, sobald $g(x, 0)$ positiv wird, und dann positiv bleibt, w. z. b. w.

Gibt man sich in Umkehrung des bisherigen Vorgehens eine in der Umgebung von $x = x_0$ mit beschränkter integrierbarer Ableitung versehene Funktion $u(x)$ vor, die für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt, dann kann man sich die Frage vorlegen, ob diese Funktion eine Ober- oder Unterfunktion von $y' = f(x, y)$ ist. Um dies zu entscheiden, hat man den Fehler

$$h(x) = u'(x) - f[x, u(x)]$$

zu bilden[10]). Sofern dieser existiert und für $x \geqq x_0$ stets positiv ist, ist $u(x)$ dort nach dem Hilfssatz eine Oberfunktion von $y' = f(x, y)$. Dies bestätigt man, indem man schreibt

$$u' = f(x, u) + h(x).$$

So ist beispielsweise die Funktion $u(x) = y_0$ eine Ober- oder Unterfunktion von $y' = f(x, y)$, je nachdem ob $f(x, y_0)$ für $x \geqq x_0$ negativ oder positiv ist, denn der mit $u(x) = y_0$ gebildete Fehler ist $h = -f(x, y_0)$[11]).

Sind $u'(x)$ und $f(x, y)$ stetig und genügt $f(x, y)$ außerdem einer Lipschitz-Bedingung, so ist $u(x)$ für $x \geqq x_0$ nach Satz 2 Oberfunktion von $y' = f(x, y)$, wenn dort der nicht identisch verschwindende Fehler $h(x) \geqq 0$ ist.

---

[10]) Es sei hier darauf hingewiesen, daß nicht jede Funktion $U(x)$, welche im links offenen Intervall I der Ungleichung $U > y$ genügt, eine Oberfunktion von $y' = f(x, y)$ im Sinne der oben abgegebenen Erklärung ist. Auch braucht die Ableitung einer Oberfunktion $U(x)$ nicht im ganzen Intervall größer zu sein als die einer Lösung $y(x)$.

[11]) M. Gayas, Bull. d. Sciences math. (2) **58** (1934), S. 236 und M. Müller, Jahrb. über d. Fortschr. d. Math. **60**$_{\text{I}}$ (1934), S. 374.

§ 3.

Einige Verfahren zur Konstruktion von Ober- und Unterfunktionen.

Im Anschluß an die eben bewiesenen Sätze werden im folgenden einige Verfahren beschrieben, mit deren Hilfe sich Ober- und Unterfunktionen konstruieren lassen.

1. Sowohl der Hilfssatz als auch Satz 2 des vorhergehenden Paragraphen liefern jeder eine Konstruktion einer Ober-(Unter-)funktion von $y' = f(x, y)$. Man wird dabei $F(x, y)$ so einrichten, daß die Gleichung $y' = F(x, y)$ elementar integrierbar wird.

2. Will man einen Streckenzug konstruieren, der eine Oberfunktion darstellt[12]), so kann man in ähnlicher Weise wie bei der Konstruktion des Euler-Cauchyschen Streckenzuges verfahren. In der Umgebung von (x_0, y_0) sei $f(x, y)$ stetig, und es möge für $x \geqq x_0$ ein Streckenzug konstruiert werden, der eine Oberfunktion darstellt. Hierzu sucht man zunächst einen rechteckigen Bereich B_0: $x_0 \leqq x \leqq x_0 + a$, $|y - y_0| \leqq b$ mit hinreichend kleinem positivem a und b auf (Fig. 3), in welchem $f(x, y)$ stetig ist; M_0 sei der größte Wert von $f(x, y)$ in B_0. Dann stellt nach Satz 2 die Gerade $y = y_0 + M_0(x - x_0)$, solange sie in B_0 verläuft, eine Oberfunktion von $y' = f(x, y)$ dar. Diese Gerade erreiche den Rand von B_0 im Punkte (x_1, y_1). Zur Konstruktion der nächsten Strecke des Streckenzuges suchen wir den größten Wert M_1 von $f(x, y)$ in dem Bereich B_1: $x_1 \leqq x \leqq x_1 + a$, $|y - y_1| \leqq b$ auf, wobei a und b dieselben Konstanten sein mögen wie bei B_0, und $f(x, y)$ in B_1 als stetig vorausgesetzt wird. Dann liefert die Gerade $y = y_1 + M_1(x - x_1)$, solange sie in B_1 verläuft, eine weitere Strecke des zu konstruierenden Streckenzuges. Indem man in der angegebenen Weise fortfährt, erhält man einen Streckenzug, von dem noch zu zeigen ist, daß er eine Oberfunktion von $y' = f(x, y)$ darstellt. Die Konstruktion läßt sich solange fortsetzen, bis man auf einen Bereich stößt, in welchem $f(x, y)$ nicht mehr überall erklärt oder stetig ist.

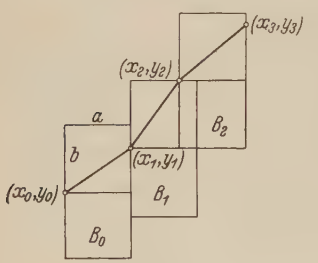

Fig. 3.

Wir zeigen jetzt, daß die durch den Streckenzug dargestellte Funktion $U(x)$ keine Lösung $u(x)$ von $y' = f(x, y)$ unterschreiten kann. Zunächst

[12]) Hierbei wird also zugelassen, daß die Oberfunktion eine stückweise differentiierbare Funktion ist. Die hier beschriebene Konstruktion ist gegenüber der Perronschen [O. Perron, Math. Annalen 76 (1915), S. 472/473] insofern verschärft, als in der Definitionsgleichung $D_{+y} > f(x, y)$ zu dem Ungleichheitszeichen noch das Gleichheitszeichen hinzugefügt ist.

folgt für das Intervall $x_0 \leqq x \leqq x_1$ nach Satz 2, da $U(x)$ der Gleichung $U'(x) = M_0$ genügt, daß $U(x)$ dort keine Lösung $u(x)$ von $y' = f(x, y)$ unterschreitet. Weiter lehrt Satz 2, daß $U(x)$ beginnt größer als $u(x)$ zu werden, und es dann auch bleibt, sobald $f[x, u(x)] < M_0$ wird. Unter dieser Voraussetzung ist dann $U(x_1) > u(x_1)$. Wir nehmen nun an, daß es im Intervall $x_1 < x \leqq x_2$ eine Abszisse X gibt, für welche $u(x)$ erstmals wieder $U(x)$ erreicht, und zeigen, daß diese Annahme auf einen Widerspruch führt. Es wäre dann für hinreichend nahe bei X liegendes x

$$U(x) - u(x) = \int_X^x [M_1 - f(t, u)]\, dt.$$

Für $x < X$ würde dann, da der Integrand nicht negativ ist, folgen

$$U(x) \leqq u(x),$$

was unserer Annahme widerspricht, daß $u(x)$ für $x = X$ erstmals wieder $U(x)$ erreichen soll. Ist entgegen der eben gemachten Voraussetzung im Intervall $x_0 \leqq x \leqq x_1$ stets $f[x, u(x)] = M_0$, so ist dort $U(x) = u(x)$, und man kann dann dieselben Schlüsse anwenden, indem man jetzt vom Punkt (x_1, y_1) ausgeht. Damit ist gezeigt, daß $U(x) \geqq u(x)$ ist.

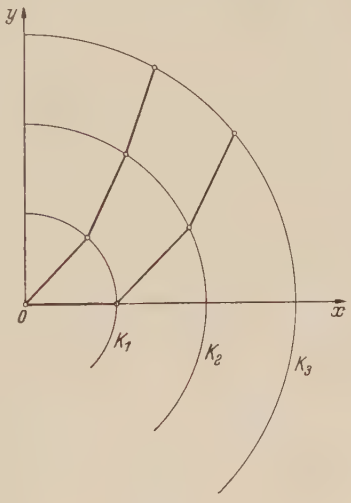

Fig. 4.

In entsprechender Weise kann man einen Streckenzug konstruieren, der eine Unterfunktion darstellt. Man hat dabei in jedem Bereich B_i jeweils M_i durch m_i zu ersetzen, wo m_i der kleinste Wert ist, den $f(x, y)$ in B_i annimmt.

Bei der eben beschriebenen Konstruktion haben wir der Einfachheit halber angenommen, daß die Bereiche B_i rechteckig und alle von gleicher Größe sind. Die Konstruktion läßt sich aber auch durchführen, wenn man an Stelle der rechteckigen Bereiche geeignete konvexe nimmt, die von verschiedener Gestalt und Größe sein können.

Besonders einfach gestaltet sich die Konstruktion eines solchen Streckenzuges, wenn man in der Umgebung von (x_0, y_0), in welcher $f(x, y)$ stetig ist, ein Isoklinenfeld, d. h. die Schar der Kurven $f(x, y) = \text{konst.}$ zeichnen kann.

Will man beispielsweise eine Ober- und eine Unterfunktion der durch den Anfangspunkt gehenden Lösung von $y' = r = |\sqrt{x^2 + y^2}|$ bestimmen, so hat man als Isoklinen Kreise mit dem Anfangspunkt als Mittelpunkt (Fig. 4.) Zeichnet man die Kreise K_1, K_2, ... mit den Radien $r = 1, 2, \ldots$, so hat

man bei der Konstruktion der Oberfunktion im Innern von K_1 eine Gerade durch den Anfangspunkt mit der Steigung 1 zu zeichnen, anschließend zwischen K_1 und K_2 eine Gerade mit der Steigung 2 usw.; bei der Konstruktion der Unterfunktion in K_1 eine Gerade durch den Anfangspunkt mit der Steigung 0, anschließend zwischen K_1 und K_2 eine Gerade mit der Steigung 1 usw. Man erhält so zwei stetige Streckenzüge, von denen der eine Ober-, der andere eine Unterfunktion von $y' = r$ darstellt.

3. Eine weitere Konstruktion schließt sich an die Konvergenzuntersuchungen des § 1 an. Die dort eingeführten Funktionen

$$V(x) = u_0 + Y, \quad v(x) = u_0 - Y$$

stellen nämlich eine Ober- und eine Unterfunktion von $y' = f(x, y)$ dar. Um dies zu bestätigen, stellen wir das Vorzeichen des Fehlers fest. Er ist bei $V(x)$

$$V' - f(x, V) = u_0' + Y' - f(x, u_0 + Y).$$

Nach (2) ist $Y' = |h_0| + LY$, und damit schreibt sich der Fehler

$$h_0 + |h_0| + LY + f(x, u_0) - f(x, u_0 + Y).$$

Solange V in B bleibt, folgt daraus auf Grund der Lipschitz-Bedingung, daß der Fehler $\geqq h_0 + |h_0|$ ist und somit niemals negativ sein kann. Aus den Darlegungen des § 1 folgt unmittelbar, daß V für $x > x_0$ die Lösung y nicht unterschreiten kann und somit Oberfunktion von $y' = f(x, y)$ ist[13]).

In entsprechender Weise zeigt man, daß v eine Unterfunktion dieser Gleichung ist.

Setzt man beispielsweise $u_0(x) = y_0$, so hat man in

$$V = y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} |f(t, y_0)| \, dt,$$

$$v = y_0 - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} |f(t, y_0)| \, dt,$$

eine Ober- und eine Unterfunktion von $y' = f(x, y)$.

§ 4.

Konstruktion einer verbesserten Ober-(Unter-)funktion aus einer Ober-(Unter-)funktion.

Wir haben eben einige Verfahren beschrieben, welche bei der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ die Konstruktion von Ober- und Unterfunktionen

[13]) Das in Satz 2 gegebene Kriterium reicht nicht aus, um dies zu entscheiden, da die rechte Seite der Differentialgleichung, der V genügt, bei stetigem $f(x, y)$ nur beschränkt und integrierbar, also im allgemeinen nicht stetig ist.

leisten. Damit hat man einen ersten groben Anhalt über den Verlauf der Lösung, denn Ober- und Unterfunktion stellen zwei Schranken dar, außerhalb welcher keine Lösung von $y' = f(x, y)$ verläuft. Wir zeigen nun, wie man diese Schranken verbessern kann, d. h. aus einer Ober-(Unter-)funktion eine Ober-(Unter-)funktion gewinnen kann, welche die Lösung besser annähert als diejenige, von welcher man ausgegangen ist. Das im folgenden beschriebene Verfahren zur Konstruktion verbesserter Ober-(Unter-)funktionen bildet die Grundlage einer Methode zur Gewinnung von Folgen von Ober-(Unter-)funktionen, die gegen die Lösung konvergieren. Kennzeichnend für dieses Verfahren ist, daß es die zur Führung des Picardschen Existenzbeweises notwendige Lipschitz-Bedingung in stärkerem Maße ausnutzt, als dies beim Picardschen Verfahren der schrittweisen Näherungen geschieht.

Wir beweisen zunächst einen Satz, der zeigt, wie man aus einer Ober-(Unter-)funktion eine verbesserte Ober-(Unter-)funktion gewinnen kann.

Satz 3. *Ist $u(x)$ eine durch den Punkt (x_0, y_0) gehende, in einem Intervall I erklärte, geeignete Ausgangsfunktion, und ist der mit $u(x)$ gebildete Fehler*

$$h(x) = u'(x) - f[x, u(x)]$$

der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ dort nicht negativ (positiv), dann gibt es ein Intervall K, in welchem $u(x)$ Ober-(Unter-)funktion von $y' = f(x, y)$ ist, und die mit dem Fehler $h(x)$ konstruierte Funktion

$$v = u - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h(t)\, dt$$

eine verbesserte Ober-(Unter-)funktion von $y' = f(x, y)$ darstellt. Der rechte Endpunkt von K ist gleich der Abszisse des Punktes, in welchem die Kurve von v erstmals den Rand von B trifft.

Beweis. Ist $u(x)$ eine im Sinne der Vereinbarungen des § 1 geeignete Ausgangsfunktion, deren Fehler sein Vorzeichen nicht wechselt, und sieht man eine solche Funktion als Näherungslösung von (A) an und setzt dementsprechend $y = u + z$, so genügt z der Differentialgleichung

$$z' = f(x, u + z) - f(x, u) - h(x). \tag{3}$$

Damit ist die Bestimmung der Lösung y von (A) auf die der für $x = x_0$ verschwindenden Lösung z von (3) zurückgeführt.

An Stelle der Gleichung (3) betrachten wir die bei Einführung der Lipschitz-Bedingung aus (3) hervorgehende lineare Gleichung

$$Z' = -LZ - h. \tag{4}$$

Ihre an der Stelle $x = x_0$ verschwindende Lösung ist

$$Z = -\int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h(t)\, dt.$$

Ist $h \geqq 0$, dann ist für $x \geqq x_0$ immer $Z \leqq 0$, und die Funktion

$$v = u + Z = u - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h(t)\, dt \tag{5}$$

übertrifft daher in einem Intervall K die Funktion u nicht. Existiert v im Intervall I, dann ist der rechte Endpunkt von K gleich $x_0 + a$. Im anderen Fall trifft die Kurve von v den Rand von B erstmals in einem Punkte, dessen Abszisse kleiner als $x_0 + a$ ist. Diese Abszisse ist dann der rechte Endpunkt von K (Fig. 5). Der mit v gebildete Fehler von (A) ist aber

$$f(x, u) - f(x, v) + L(u - v)$$

und somit in K stetig und niemals negativ. Da die Funktion v demnach der Differentialgleichung

$$v' = -Lv + f(x, u) + Lu$$

genügt, deren rechte Seite stetig ist und eine Lipschitz-Konstante besitzt, stellt v nach Satz 2 eine Oberfunktion von (A) dar. Da v außerdem, wie wir

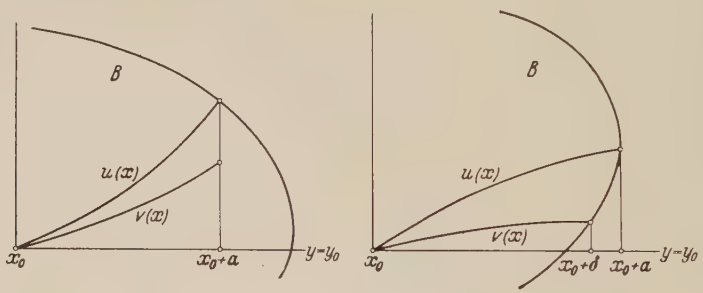

Fig. 5.

eben gesehen haben, die Funktion u nicht überschreitet, ist gleichzeitig bewiesen, daß u ebenfalls eine Oberfunktion von (A) ist. Formel (5) setzt uns somit instand, aus einer gegebenen Oberfunktion eine verbesserte zu konstruieren.

Ist entgegen der eben gemachten Annahme $h \leqq 0$, dann ist $Z \geqq 0$ und die Funktion v stellt in einem Intervall K eine Unterfunktion von (A) dar, welche dort die Funktion u nicht unterschreitet. Daraus folgt, daß u ebenfalls eine Unterfunktion von (A) ist. Formel (5) leistet somit in diesem Fall die Konstruktion einer verbesserten Unterfunktion.

Der eben bewiesene Satz lehrt insbesondere, daß eine geeignete Ausgangsfunktion $u(x)$ mit einem Fehler $h \geqq 0$ ($h \leqq 0$) unter den über $f(x, y)$ gemachten Voraussetzungen immer eine Ober-(Unter-)funktion von $y' = f(x, y)$ ist. Da der Fehler h nach Voraussetzung nur beschränkt und integrierbar ist und der Hilfssatz und Satz 2 infolgedessen nicht zu entscheiden gestatten, ob

$u(x)$ eine Ober-(Unter-)funktion ist, muß diese Eigenschaft von $u(x)$ hier nachgewiesen werden.

Wir betrachten nochmals die Gleichung (3). Außer durch (4) kann man auch durch die folgende Gleichung (6) zum Ausdruck bringen, daß $f(x, y)$ einer Lipschitz-Bedingung genügt.

$$Z' = LZ - h. \tag{6}$$

Ihre an der Stelle $x = x_0$ verschwindende Lösung ist

$$Z = -\int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h(t)\, dt.$$

Ist der mit $u(x)$ gebildete Fehler $h \geqq 0$, dann ist $Z \leqq 0$; die Funktion

$$v = u + Z = u - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h(t)\, dt \tag{7}$$

stellt dann aber nach Satz 2 in einem Intervall K eine Unterfunktion von (A) dar, denn der mit v gebildete Fehler ist

$$f(x, u) - f(x, v) - L(u - v),$$

also stetig und niemals positiv. Ist dagegen $h \leqq 0$, dann stellt die nach (7) gebildete Funktion v eine Oberfunktion von (A) dar, welche die Lösung dieser Gleichung nicht unterschreitet. Damit ist der folgende Satz, ein Gegenstück zu Satz 3, bewiesen.

Satz 4. *Ist $u(x)$ eine Ausgangsfunktion mit den in Satz 3 geforderten Eigenschaften, dann gibt es ein Intervall K, in welchem die mit dem Fehler $h(x)$ konstruierte Funktion*

$$v = u - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h(t)\, dt$$

eine Unter-(Ober-)funktion von $y' = f(x, y)$ darstellt. Der rechte Endpunkt von K ist gleich der Abszisse des Punktes, in welchem die Kurve von v erstmals den Rand von B trifft.

Der erste der beiden eben bewiesenen Sätze zeigt, wie man aus einer gegebenen Ober-(Unter-)funktion eine verbesserte Ober-(Unter-)funktion gewinnen kann, der zweite, wie man aus einer gegebenen Ober-(Unter-)funktion eine Unter-(Ober-)funktion konstruieren kann. Die in diesen beiden Sätzen geschilderte Erzeugungsweise von Ober- und Unterfunktionen bildet die Grundlage der im folgenden beschriebenen Verfahren der schrittweisen Näherungen.

Mit Hilfe der im letzten Satz beschriebenen Konstruktion ist man in der Lage, die durch den Punkt (x_0, y_0) gehende Lösung y von (A) in Schranken einzuschließen. Ist beispielsweise $u(x)$ eine in I existierende, geeignete Unterfunktion von $y' = f(x, y)$, und h der mit ihr gebildete Fehler, dann gilt in K

$$u \leqq y \leqq u - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h(t)\, dt.$$

Der Unterschied zwischen Ober- und Unterfunktion ist

$$- \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h(t)\, dt.$$

Man sieht, wie die Schranken, in welche die Lösung eingeschlossen ist, um so näher beieinander liegen, je kleiner der Betrag des Fehlers ist.

Bemerkung. Wir kommen hier nochmals auf den in § 1 gegebenen Konvergenzbeweis für das Picardsche Verfahren zurück. Nimmt man dort als Ausgangsfunktion eine geeignete Ober-(Unter-)funktion, dann erhält man als Majorante gerade die im letzten Satz konstruierte Unter-(Ober-)funktion. In der Tat, ist die Ausgangsfunktion $u_0(x)$ eine Unterfunktion, dann ist $h_0 \leqq 0$, und aus $|y - u_0| \leqq Y$ folgt

$$y - u_0 \leqq - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_0(t)\, dt.$$

Die Funktion

$$u_0 + Y = u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_0(t)\, dt$$

ist aber genau die Oberfunktion, welche nach Satz 4 aus der Unterfunktion $u_0(x)$ folgt.

Geht man beim Picardschen Verfahren von einer Ober- oder Unterfunktion aus, dann besitzt die nach diesem Verfahren konstruierte nächste Näherung im allgemeinen nicht mehr die Eigenschaft, Ober- oder Unterfunktion zu sein. Das erkennt man schon an dem folgenden Beispiel:

Nimmt man bei der Bestimmung der für $x = 0$ verschwindenden Lösung der Differentialgleichung $y' = \sin y$ die aus $y' = 1$ folgende Oberfunktion $u_0(x) = x$ als Ausgangsfunktion, so erhält man nach Picard als nächste Näherung

$$u_1 = \int_{0}^{x} \sin t\, dt = 1 - \cos x.$$

u_1 ist aber weder Ober- noch Unterfunktion, denn der mit ihr gebildete Fehler ist

$$h_1 = \sin x - \sin(1 - \cos x),$$

und dieser ist, da $h_1\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ und $h_1(\pi) < 0$, im Intervall $0 \leqq x \leqq \pi$ nicht von einerlei Vorzeichen.

Daß das Picardsche Verfahren bei geeigneten Monotonievoraussetzungen über $f(x, y)$ eine Folge von Ober- oder Unterfunktionen liefert, ist bekannt; wir werden weiter unten in § 9 darauf zu sprechen kommen.

§ 5.

Annäherung der Lösung durch eine Folge von Oberfunktionen.

Die mit der oben beschriebenen Konstruktion gegebene Möglichkeit, aus einer Oberfunktion eine verbesserte zu gewinnen, legt den Gedanken nahe, durch fortgesetzte Verbesserung aus einer Oberfunktion eine Folge von Oberfunktionen zu erzeugen, und so die Lösung durch eine Folge solcher Funktionen anzunähern. Von einer solchen Folge hat man dann zu zeigen, daß sie gegen die Lösung der Differentialgleichung konvergiert. Damit hat man ein neues Verfahren der schrittweisen Näherungen, das gegenüber dem Picardschen den Vorteil hat, daß der Unterschied zwischen Näherungsfunktion und Lösung stets von einerlei Vorzeichen ist. Außerdem zeigt sich bei diesem Verfahren, daß es in einem weit größeren Intervall konvergiert als das Picardsche.

In einem konvexen Bereich B erfülle $f(x, y)$ die in Satz 3 formulierten Voraussetzungen, und es sei $u_0(x)$ eine Oberfunktion von $y' = f(x, y)$ mit den dort geforderten Eigenschaften. Aus $u_0(x)$ konstruieren wir eine Folge von Oberfunktionen.

Da u_0 Oberfunktion ist, ist der Fehler

$$h_0(x) = u_0'(x) - f[x, u_0(x)]$$

in I niemals negativ. Nach Satz 3 gewinnt man aus u_0 die verbesserte Oberfunktion

$$u_1(x) = u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h_0(t)\, dt.$$

Sofern es ein Intervall gibt, in welchem diese existiert, folgt aus dem mit ihr gebildeten Fehler

$$h_1 = u_1' - f(x, u_1)$$

eine weitere wiederum verbesserte Oberfunktion u_2.

$$u_2 = u_1 - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h_1(t)\, dt.$$

Indem man in dieser Weise unbegrenzt fortfährt, erhält man eine unendliche Folge von Oberfunktionen $u_0, u_1, u_2, \ldots$. Allgemein hat man

$$u_n = u_{n-1} - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h_{n-1}(t)\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{8}$$

$$h_n = u_n' - f(x, u_n) \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{9}$$

Alle u_n nehmen nach Konstruktion an der Stelle x_0 den Wert y_0 an.

Nehmen wir zunächst einmal an, daß es ein Intervall K gibt, in welchem alle u_n existieren, dann haben wir zu zeigen, daß $\lim_{n \to \infty} u_n$ existiert und die durch den Punkt (x_0, y_0) gehende Lösung von (A) darstellt. Um die Existenz dieses Grenzwertes nachzuweisen, beweisen wir die gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$y = u_0 + (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \ldots. \tag{10}$$

Indem man die in Klammern gesetzten Differenzen mit Hilfe von (8) ausdrückt und in (10) einsetzt, erhält man

$$y = u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} (h_0 + h_1 + h_2 + \ldots)\, dt. \tag{11}$$

Daraus folgt, daß die Reihe (10) gleichmäßig konvergent ist, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$ es ist.

Durch Differentiieren von (8) bekommt man

$$u_n' = u_{n-1}' - h_{n-1} + L \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h_{n-1}(t)\, dt,$$

und daraus unter Berücksichtigung von (9)

$$u_n' = f(x, u_{n-1}) + L \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h_{n-1}\, dt.$$

Damit wird der durch (9) definierte Fehler h_n

$$h_n = f(x, u_{n-1}) - f(x, u_n) + L \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h_{n-1}\, dt. \tag{12}$$

Auf Grund der Lipschitz-Bedingung und vermöge (8) folgt daraus

$$h_n \leqq 2L \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h_{n-1}\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{13}$$

Nunmehr erklären wir eine Funktionenfolge $H_n(x)$ durch

$$H_n = 2L \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} H_{n-1}\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{14}$$

wobei $H_0(x) \equiv h_0(x)$ ist. Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} H_n = S$ eine Majorante der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$.

Diese Majorante läßt sich in geschlossener Form darstellen. Um dies zu zeigen, leiten wir (14) nach x ab und erhalten so

$$H_n' = 2LH_{n-1} - LH_n.$$

Bei Benutzung des symbolischen Differentialoperators schreibt sich die letzte Gleichung

$$(D + L) H_n = 2LH_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{15}$$

Aus diesem Gleichungssystem folgt, wie man durch vollständige Induktion bestätigt,

$$(D + L)^n H_n = (2L)^n H_0 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{16}$$

Eine partikuläre Lösung dieser linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist[14])

$$(2L)^n \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-L(x-t)} H_0(t)\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{17}$$

Bleibt zu zeigen, daß diese partikuläre Lösung dieselben Anfangsbedingungen erfüllt wie $H_n(x)$. Da die Funktionen $H_1, H_2, \ldots$ alle an der Stelle x_0 verschwinden, schließt man aus dem Gleichungssystem (15), daß H_n diejenige Lösung von (16) ist, die an der Stelle x_0 mitsamt ihren $n-1$ ersten Ableitungen verschwindet. Das sind aber dieselben Anfangsbedingungen, denen die partikuläre Lösung (17) genügt. Somit ist

$$H_n = 2L \int_{x_0}^{x} \frac{[2L(x-t)]^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-L(x-t)} h_0(t)\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ist μ_0 die obere Grenze von $h_0(x)$ im Intervall I, dann zeigt eine leichte Abschätzung, daß

$$H_n \leqq \mu_0 \frac{(2La)^n}{n!}.$$

---

[14]) Vgl. z. B. C. DE LA VALLÉE-POUSSIN, Cours d'Analyse Infinitésimale, Bd. II, 6. Aufl., Louvain 1928, S. 211; E. KAMKE, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930, S. 257.

Damit ist die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} H_n$ und zugleich die der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$ bewiesen.

Die Summe der Majorante ist

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} H_n = h_0 + 2L \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} \left[1 + \frac{2L(x-t)}{1!} + \ldots\right] h_0(t)\, dt,$$

oder

$$S = h_0 + 2L \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_0(t) dt. \tag{18}$$

Um den vorstehenden Konvergenzbeweis durchführen zu können, hatten wir angenommen, daß es ein Intervall K gibt, in welchem alle u_n existieren. Ob dies der Fall ist, kann man in folgender Weise entscheiden. Zunächst ergibt sich aus (11), daß die Funktion

$$v_0 = u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} S(t)\, dt$$

die Lösung y nicht übertreffen kann. Auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} H_n$ folgt durch Summierung der Gleichungen (14)

$$S = h_0 + 2L \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} S(t)\, dt. \tag{19}$$

Vergleichen von (18) und (19) zeigt, daß

$$\int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} S(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_0(t)\, dt.$$

Damit erhält man

$$v_0 = u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_0(t)\, dt. \tag{20}$$

Das ist aber gerade die Unterfunktion, welche nach der in Satz 4 beschriebenen Konstruktion aus der Oberfunktion u_0 hervorkommt.

Nimmt man nun für K das in Satz 4 angegebene Intervall, so existieren in diesem alle Oberfunktionen u_n. Allgemeiner kann man an Stelle der durch (20) erklärten Unterfunktion v_0 irgendeine in einem Intervall I': $x_0 \leqq x \leqq x_0 + a'$ erklärte Unterfunktion v nehmen, wobei $x_0 + a'$ die Abszisse des Punktes ist, in welchem die Kurve von v erstmals den Rand von B trifft. Dann ist K das kleinere der beiden Intervalle I und I'. Da in ihm alle u_n existieren, ist es das Konvergenzintervall des Verfahrens.

Um den Beweis vollständig zu machen, haben wir noch zu zeigen, daß $y(x) = \lim_{n \to \infty} u_n(x)$ Lösung von $y' = f(x, y)$ ist. Hierzu setzen wir den Ausdruck

$$y - u_n + \int_{x_0}^{x} [f(t, u_n) - f(t, y)]\, dt + \int_{x_0}^{x} h_n\, dt = r_n(x). \tag{21}$$

Da die Funktionenfolge der u_n mit wachsendem n in K gleichmäßig gegen y und die der h_n dort gleichmäßig gegen Null geht, strebt die der r_n dort gleichmäßig gegen Null. Aus (21) folgt unter Benutzung von (9)

$$y = u_n + \int_{x_0}^{x} f(t, y)\, dt - \int_{x_0}^{x} u_n'\, dt + r_n,$$

oder, da $u_n(x_0) = y_0$ ist,

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y)\, dt + r_n.$$

Da die Folge der r_n mit wachsendem n gleichmäßig in K gegen Null geht, kommt

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y)\, dt,$$

woraus nach Differentiation folgt, daß y Lösung von $y' = f(x, y)$ ist.

In bekannter Weise zeigt man schließlich noch, daß $y' = f(x, y)$, wenn $f(x, y)$ einer Lipschitz-Bedingung genügt, eine und nur eine Lösung durch den Punkt (x_0, y_0) schicken kann.

Damit ist in allen Teilen der folgende Satz bewiesen:

Satz 5. *Es sei $u_0(x)$ eine durch den Punkt (x_0, y_0) gehende, in einem Intervall I existierende, geeignete Oberfunktion der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$. Konstruiert man von u_0 ausgehend die Folge der Oberfunktionen*

$$u_n = u_{n-1} - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h_{n-1}(t)\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

wobei

$$h_n = u_n' - f[x, u_n(x)] \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

dann gibt es ein Intervall K, in welchem diese mit wachsendem n abnehmende Folge gleichmäßig gegen die durch (x_0, y_0) gehende Lösung der Differentialgleichung konvergiert. Dabei ist der rechte Endpunkt von K gleich der Abszisse des Punktes, in welchem die Kurve der Unterfunktion

$$v_0 = u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_0\, dt$$

oder sonst einer durch (x_0, y_0) gehenden geeigneten Unterfunktion erstmals den Rand von B trifft.

§ 6.

Annäherung der Lösung durch eine Folge von Unterfunktionen.

Ebenso wie wir eben die Lösung von $y' = f(x, y)$ aus einer Folge von Oberfunktionen gewinnen konnten, kann man sie auch aus einer Folge von Unterfunktionen erzeugen. Man geht hierbei von einer durch den Punkt (x_0, y_0) gehenden in einem Intervall I erklärten geeigneten Unterfunktion $u_0(x)$ aus, und konstruiert aus ihr nach Satz 3 eine verbesserte Unterfunktion u_1.

$$u_1 = u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h_0(t)\, dt.$$

Indem man aus u_1 wiederum eine verbesserte Unterfunktion u_2 erzeugt und in dieser Weise unbegrenzt fortfährt, erhält man eine unendliche Folge von Unterfunktionen: $u_0, u_1, u_2, \ldots$. Auch hier ist die Folge der u_n durch die Gleichungen (8) und (9) bestimmt, nur daß jetzt die h_n negativ sind. Dementsprechend wird man der Einfachheit halber in (12) $h_n = -k_n$ setzen und hat dann eine Folge positiver Funktionen k_n, die nach (12) der Ungleichung

$$k_n \leqq 2L \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} k_{n-1}(t)\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

genügen. Mit der in § 5 eingeführten Funktionenfolge der H_n folgt als Majorante der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} k_n$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} H_n = k_0 + 2L \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)}\, k_0(t)\, dt.$$

Daraus ergibt sich die gleichmäßige Konvergenz der Folge der u_n in einem Intervall K nach denselben Überlegungen wie in § 5. Aus der letzten Formel findet man nach (11) die Oberfunktion

$$v_0 = u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)}\, S(t)\, dt,$$

die in entsprechender Weise wie in § 5 umgeformt lautet

$$v_0 = u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)}\, h_0(t)\, dt.$$

Sie ist identisch mit der Oberfunktion, die nach Satz 4 aus der Unterfunktion u_0 hervorkommt. Damit ist der folgende Satz bewiesen, der ein Gegenstück zu dem vorhergehenden darstellt.

Satz 5′. *Es gilt ein dem Satz* 5 *in allen Stücken entsprechender Satz, den man aus dem ersteren erhält, indem man „Oberfunktion" mit „Unterfunktion" vertauscht und „abnehmende" durch „zunehmende" ersetzt.*

Beispiel 2. Es soll die durch den Anfangspunkt gehende Lösung der Riccatischen Gleichung $y' = x - y^2$ in dem rechteckigen Bereich

$$B: \qquad 0 \leqq x \leqq \sqrt{2}, \quad |y| \leqq 1$$

durch eine Folge von Oberfunktionen angenähert werden. Wir gehen von der aus $u_0' = x$ folgenden Oberfunktion $u_0 = \frac{1}{2} x^2$ aus. Sie erreicht den Wert 1 gerade für $x = \sqrt{2}$. Da $v = 0$ eine Unterfunktion unserer Gleichung ist, und u_0 und v im Intervall I: $0 \leqq x \leqq \sqrt{2}$ existieren, konvergiert nach Satz 5 die Folge der Oberfunktionen $u_0, u_1, u_2, \ldots$ in diesem Intervall gleichmäßig gegen die durch den Anfangspunkt gehende Lösung der Riccatischen Gleichung. Als verbesserte Oberfunktion u_1 erhält man mit $h_0 = \frac{x^4}{4}$

$$u_1 = \frac{1}{2} x^2 - \int_0^x e^{-2(x-t)} \frac{t^4}{4} \, dt.$$

Wie man sieht, ist das Konvergenzintervall hier ausgedehnter als dasjenige, zu welchem wir oben beim Picardschen Verfahren gelangt sind.

§ 7.

Vergrößerung des Konvergenzintervalls.

Die bisherigen Ergebnisse über die Annäherung der Lösung durch Folgen von Ober- oder Unterfunktionen legen es nahe, sich von der Einschränkung zu befreien, die durch die bisher benutzte Voraussetzung eines konvexen oder gar rechteckigen Bereiches in die Betrachtungen hineingetragen wird. Dabei zeigt sich dann, daß sich bei geeignetem Bereich ein sehr ausgedehntes Konvergenzintervall unseres Verfahrens angeben läßt.

In der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ sei die rechte Seite in einer gewissen Umgebung des Punktes (x_0, y_0) erklärt und stetig, und es existiere in einem Intervall I: $x_0 \leqq x \leqq x_0 + a$ $(a > 0)$ eine durch den Punkt (x_0, y_0) gehende mit beschränkter integrierbarer Ableitung versehene Ober- und eine solche Unterfunktion von (A). Die Oberfunktion $y = U_0(x)$ werde dargestellt durch die Kurve C, die Unterfunktion $y = u_0(x)$ durch die Kurve C'. Zeichnet man dann eine Vertikale S, welche die Abszissenachse im Punkt $x_0 + a$ schneidet, so wird durch die Kurven C und C' und die Gerade S ein Bereich begrenzt. Bereiche solcher oder ähnlicher Art seien im folgenden mit $\mathfrak{B}$ bezeichnet.

Ist in einem solchen Bereich $\mathfrak{B}$ die Funktion $f(x, y)$ stetig und besitzt sie dort eine Lipschitz-Konstante L, dann kann man entweder von der Oberfunktion U_0 ausgehend eine Folge von Oberfunktionen U_n konstruieren, oder von der Unterfunktion u_0 ausgehend eine Folge von Unterfunktionen u_n.

Jede dieser Folgen konvergiert nach Satz 5 oder 5′ im Intervall I gleichmäßig gegen die durch (x_0, y_0) gehende Lösung von $y' = f(x, y)$. Daher gilt:

Satz 6. *Besitzt die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ eine in einem Intervall I: $x_0 \leqq x \leqq x_0 + a$ $(a > 0)$ existierende, geeignete Ober- und eine solche Unterfunktion, die beide durch (x_0, y_0) gehen, und erfüllt $f(x, y)$ in dem durch die Vertikale $x = x_0 + a$ und die Kurven der Ober- und der Unterfunktion begrenzten Bereich $\mathfrak{B}$ die geforderten Voraussetzungen, dann existiert die Lösung der Differentialgleichung im Intervall I, und die in den Sätzen 5 und 5′ beschriebenen Folgen von Ober- und Unterfunktionen konvergieren in I gleichmäßig gegen die durch (x_0, y_0) gehende Lösung der Differentialgleichung.*

Ein wichtiger Sonderfall des eben ausgesprochenen Satzes ist der, daß sich das Intervall I ins Unendliche erstreckt. Wenn sich nämlich eine Ober- und eine Unterfunktion angeben lassen, die beide für endliches $x > x_0$ endlich bleiben, und $f(x, y)$ in dem durch die Kurven der Ober- und der Unterfunktion sowie die mit endlichem positivem a konstruierte Vertikale S begrenzten Bereich $\mathfrak{B}$ die Voraussetzungen des Satzes 6 erfüllt, dann konvergiert unser Verfahren für alle endlichen $x > x_0$ gegen die für alle endlichen $x > x_0$ endliche Lösung.

Beispiel 3. Bei der Riccatischen Differentialgleichung $y' = x - y^2$ ist, wenn man die durch den Anfangspunkt gehende Lösung aufsucht, $u_0 = 0$ eine Unterfunktion und $U_0 = \frac{1}{2} x^2$ eine Oberfunktion. Zieht man die Vertikale $x = a$ $(a > 0)$, dann ist in dem damit abgegrenzten Bereich $\mathfrak{B}$ die Lipschitz-Konstante L gleich dem Maximalbetrag von $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$. Da y in $\mathfrak{B}$ den Maximalbetrag $\frac{1}{2} a^2$ besitzt, kann man $L = a^2$ setzen. Somit bleibt L endlich für jeden endlichen Wert von a und unser Verfahren konvergiert in diesem Fall für alle endlichen positiven x und liefert die für diese existierende Lösung der Riccatischen Gleichung[15]).

Im allgemeinen wird man bei einer Differentialgleichung nur ein Konvergenzintervall von endlicher Länge zu erwarten haben. Die Länge dieses Intervalls wird von den Eigenschaften von $f(x, y)$ abhängen, sei es, daß wie bei $y' = 1 + y^2$, also bei regulärem $f(x, y)$, die Lösung in einem Punkte singulär wird, oder daß die Lösung durch einen im Endlichen gelegenen Punkt geht, in welchem $f(x, y)$ nicht mehr regulär ist. Aus der Fülle der Möglichkeiten, die sich hier darbieten, sollen im folgenden einige typische Beispiele gebracht werden, an denen sich die Leistungsfähigkeit des neuen Verfahrens erweisen wird.

1. Die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ besitze eine durch den Punkt (x_0, y_0) gehende in einem rechts offenen Intervall I erklärte mit endlicher

[15]) Vgl. hierzu auch O. Perron, Math. Annalen 76 (1915), S. 480.

integrierbarer Ableitung versehene Unterfunktion $u_0(x)$, die für $x \to x_0 + a$ gegen $+\infty$ geht. In dem durch die Halbgerade $x = x_0$, $y \geqq y_0$ und die Kurve der Unterfunktion $u_0(x)$ begrenzten Gebiet G sei $f(x, y)$ stetig und besitze daselbst für endliches y eine endliche Lipschitz-Konstante. Dann kann man einen in I hinreichend nahe bei $x_0 + a$ gelegenen Punkt mit der Abszisse a_0 angeben (Fig. 6), so daß $b = u_0(a_0) - y_0$ einen beliebig großen positiven Wert annimmt. In dem in G gelegenen Bereich $\mathfrak{B}$, der durch die Gerade $y = y_0 + b$ aus G ausgeschnitten wird, läßt sich jetzt eine Folge von Unterfunktionen

$$u_n = u_{n-1} - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h_{n-1} dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

konstruieren. Dabei existiert nach Konstruktion die Unterfunktion u_n in einem Intervall I_n: $x_0 \leqq x \leqq a_n$, wo a_n diejenige Abszisse ist, in welcher u_n erstmals den Wert $y_0 + b$ erreicht. Da $a_{n+1} \leqq a_n$ und die Folge der a_n beschränkt ist, existiert $\lim_{n \to \infty} a_n = x_0 + a'$, wobei $0 < a' \leqq a$ ist, denn der Schnittpunkt der mit $M \geqq f(x, y)$ gebildeten Oberfunktion $y_0 + (x - x_0) M$ mit der Geraden $y = y_0 + b$ besitzt die Abszisse $x_0 + \frac{b}{M} \leqq x_0 + a'$. In dem damit erklärten Intervall existieren alle u_n, und es konvergiert daher die Folge der u_n in diesem Intervall gleichmäßig gegen die Lösung von $y' = f(x, y)$. Diese nimmt an der Stelle $x = x_0 + a'$ den Wert $y_0 + b$ an.

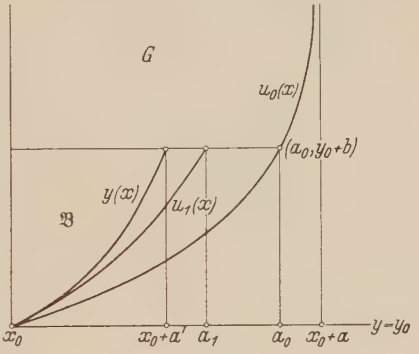

Fig. 6.

Da sich aber a_0 beliebig nahe bei $x_0 + a$ wählen und dadurch b ein beliebig großer positiver Wert erteilen läßt, konvergiert das Verfahren in einem Intervall K: $x_0 \leqq x < x_0 + \delta$, wobei $x_0 + \delta \leqq x_0 + a$ diejenige Abszisse ist, für welche die Lösung gegen $+\infty$ geht.

Besitzt die Differentialgleichung eine Oberfunktion $U_0(x)$, die für $x \to x_0 + a$ gegen $-\infty$ geht, dann kann man in entsprechender Weise eine Folge von Oberfunktionen konstruieren, die gleichmäßig gegen die Lösung konvergiert. *In beiden Fällen reicht das Konvergenzintervall bis zur Abszisse desjenigen Punktes, in welchem die Lösung singulär wird.*

2. Die Differentialgleichung sei von der Form $y' = \frac{1}{\varphi(x, y)}$, wo $\varphi(x, y)$ in der Umgebung von (x_0, y_0) stetig ist, und $\varphi(x_0, y_0) \neq 0$ ist. Geht die durch (x_0, y_0) gehende Lösung dieser Gleichung durch einen Punkt, in welchem $\varphi(x, y)$ verschwindet, dann zeigt die Ableitung der Lösung in diesem Punkt

ein singuläres Verhalten. Für gewöhnlich studiert man die Lösung in der Umgebung eines solchen Punktes, indem man die Gleichung durch Vertauschen der Veränderlichen auf die Form $\frac{dx}{dy} = \varphi(x, y)$ bringt. Wir wollen hier aber zeigen, wie sich die Lösung im neuen Verfahren bis zur singulären Stelle hin konstruieren läßt, wenn man bei der ursprünglichen Form der Gleichung bleibt. Es handelt sich dabei wieder darum, einen möglichst ausgedehnten Bereich $\mathfrak{B}$ zu bestimmen, in welchem die rechte Seite der Differentialgleichung stetig ist und eine Lipschitz-Konstante besitzt. Wie man dabei vorgeht, soll der Einfachheit halber an Hand zweier Beispiele erläutert werden.

Beispiel 4. Es sei $\varphi = 1 - xy$, und es soll die durch den Anfangspunkt gehende Lösung von $y' = \frac{1}{\varphi}$ durch schrittweise Näherungen ermittelt werden[16]). φ verschwindet auf einer Kurve C, der gleichseitigen Hyperbel $xy = 1$ (Fig. 7). Außer C benötigen wir eine Kurve C', die durch $\varphi = \varepsilon$ gegeben ist, wobei ε eine hinreichend kleine positive Zahl ist. C' ist ebenfalls eine gleichseitige Hyperbel. Eine Unterfunktion von $y' = \frac{1}{\varphi}$ ist $u_0(x) = x$, ihre Kurve schneidet C' im Punkte Q_0. Eine Oberfunktion ergibt sich aus der exakten Differentialgleichung

$$y' = \frac{1 + \frac{1}{2}y^2}{1 - xy}.$$

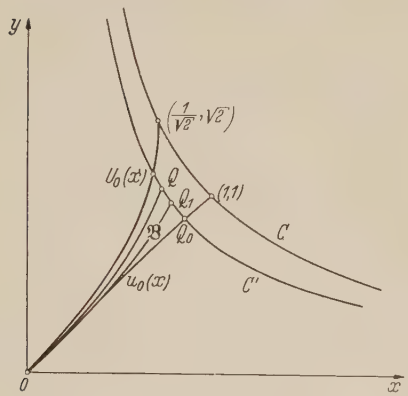

Fig. 7.

Die durch den Anfangspunkt gehende Lösung dieser Gleichung ist durch

$$x = \frac{2U_0}{2 + U_0^2}$$

gegeben. Diese Oberfunktion schneidet die Kurve C im Punkte $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$.

In dem durch C' sowie die Kurven der Ober- und der Unterfunktion begrenzten Bereich $\mathfrak{B}$ ist $\frac{1}{\varphi}$ stetig und besitzt dort eine Lipschitz-Konstante; es ist $\frac{1}{\varphi} \leqq \frac{1}{\varepsilon}$ und wegen $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varphi}\right) = \frac{x}{(1 - xy)^2}$ und $x < 1$ kann $L = \frac{1}{\varepsilon^2}$ gesetzt werden. Nunmehr kann man nach Satz 3 aus u_0 eine verbesserte Unterfunktion konstruieren, ihre Kurve schneide C' in Q_1. Aus u_1 eine weitere

[16]) Die Gleichung ist elementar integrierbar, ihre Lösung ist $x = \int_0^y e^{\frac{1}{2}(t^2 - y^2)}\, dt$.

Unterfunktion u_2, usw. Auf diese Weise erhält man eine Folge von Unterfunktionen, von der man an Hand ähnlicher Überlegungen wie bei dem vorigen Beispiel zeigt, daß sie in einem Intervall K gleichmäßig gegen die Lösung konvergiert. Die Lösungskurve trifft C' in einem Punkte Q, dessen Abszisse den rechten Endpunkt des Intervalls K liefert. Da sich ε beliebig klein wählen läßt, kann man die Lösung bis zu dem Punkt hin bestimmen, in welchem sie die Kurve C trifft, also bis zu dem Punkt, in welchem ihre Ableitung unendlich wird.

Beispiel 5. Die durch den Punkt (0, 1) gehende Lösung von $y' = -\frac{x}{y}$ ist $y = |\sqrt{1 - x^2}|$. Um sie zu konstruieren, stellt man zunächst fest, daß die rechte Seite der Gleichung auf der x-Achse nicht erklärt ist. Oberhalb der Geraden $y = \varepsilon$, wo ε eine hinreichend kleine positive Zahl ist, ist die rechte Seite stetig und besitzt dort eine Lipschitz-Konstante. Eine durch (0, 1) gehende Oberfunktion ist $U_0 = 1 - \frac{1}{2}x^2$. Das durch die Punkte (0, 0), (0, 1) begrenzte Stück der y-Achse können wir als ausgeartete Unterfunktion ansehen. In dem durch die Kurven der Ober- und der Unterfunktion sowie die Gerade $y = \varepsilon$ begrenzten Bereich $\mathfrak{B}$ ist dann die rechte Seite stetig und besitzt dort eine Lipschitz-Konstante (Fig. 8). Nunmehr kann man von der Oberfunktion U_0 ausgehend eine Folge von Oberfunktionen konstruieren, wobei die Abszissen der rechten Endpunkte der Intervalle, in denen die Oberfunktionen existieren, beständig abnehmen. Es gibt dann wieder ein Intervall K, in welchem alle Oberfunktionen existieren und ihre Folge gleichmäßig gegen die Lösung von $y' = -\frac{x}{y}$ konvergiert. Da sich ε beliebig klein wählen läßt, kann man die Lösung bis zu dem Punkt hin konstruieren, in welchem die Lösungskurve die x-Achse schneidet, d. h. bis zu dem Punkt, in welchem ihre Ableitung unendlich wird.

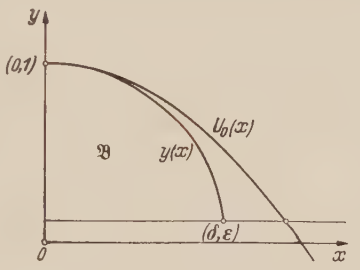

Fig. 8.

3. Wir untersuchen weiter das Konvergenzintervall des Verfahrens an dem Beispiel einer Differentialgleichung vom Typus $y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, wo P und Q in der Umgebung von (x_0, y_0) stetig sind, und $Q(x_0, y_0) \neq 0$ ist; es soll also (x_0, y_0) nicht mit dem singulären Punkt der Gleichung zusammenfallen, d. h. dem Punkt, in welchem P und Q gleichzeitig verschwinden. Geht die durch (x_0, y_0) gehende Lösung nicht durch den nächstgelegenen singulären Punkt der Differentialgleichung, dann kann man unter den üblichen Voraussetzungen die Lösung in einem Intervall konstruieren, dessen rechter Endpunkt

eine größere Abszisse als die des singulären Punktes besitzen kann (vgl. das eben behandelte Beispiel). Bleibt der Fall zu untersuchen, daß die durch (x_0, y_0) gehende Lösung in den singulären Punkt einmündet. Wir untersuchen diesen Fall an Hand des folgenden Beispiels.

Beispiel 6. Wir zeigen an dem Beispiel der Differentialgleichung $y' = \frac{y}{x - y^2}$, wie man einen Bereich $\mathfrak{B}$ bestimmen kann, in welchem sich die Lösung durch schrittweise Näherungen bis zum singulären Punkt hin gewinnen läßt. Die durch $(-3, 1)$ gehende Lösung dieser Gleichung ist durch $1 - x = (y + 1)^2$ gegeben. Die Lösungskurve ist eine Parabel, deren Scheitel im Punkt $(1, -1)$ liegt, und die durch den singulären Punkt geht, der hier in den Anfangspunkt fällt (Fig. 9). Der Nenner der rechten Seite verschwindet in den auf der Parabel $x = y^2$ gelegenen Punkten, der Zähler in den auf der x-Achse gelegenen. Eine durch $(-3, 1)$ gehende Oberfunktion ist $U_0 = 1$, eine Unterfunktion ist die Gerade $u_0 = -\frac{1}{2}(1 + x)$. Diese berührt die Parabel $x = y^2$ im Punkt $(1, -1)$. Mit Hilfe der Parabel $x - y^2 = -\varepsilon$, wo ε eine hinreichend kleine positive Zahl ist, grenzen wir nun einen Bereich $\mathfrak{B}$ ab; er wird außer durch die eben erwähnte Parabel durch die Kurven der Ober- und der Unterfunktion begrenzt. In $\mathfrak{B}$ ist die rechte Seite unserer Differentialgleichung stetig und besitzt dort eine Lipschitz-Konstante. Von der Oberfunktion U_0 ausgehend läßt sich jetzt eine Fo'ge von Oberfunktionen konstruieren. Dabei nehmen die Intervalle, in denen die aufeinanderfolgenden Glieder der Folge existieren, in ihrer Länge ab, und es gibt wieder ein Intervall K, in welchem die Folge der U_n gleichmäßig gegen die Lösung geht. Da ε beliebig klein gewählt werden kann, läßt sich auch hier die Lösung bis zum singulären Punkt hin konstruieren.

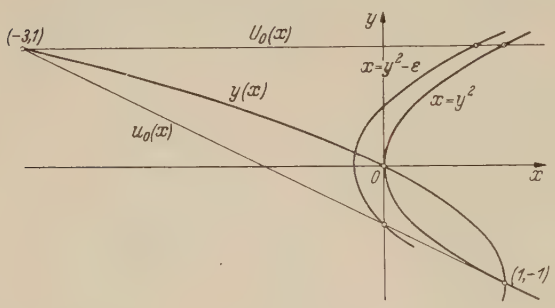

Fig. 9.

§ 8.

Einschachtelung der Lösung.

Es sei $\mathfrak{B}$ ein Bereich, der durch die Kurven einer Ober- und einer Unterfunktion sowie eine Vertikale im positiven Abstand a vom Punkte (x_0, y_0), durch welchen die Kurven der beiden Funktionen hindurchgehen, begrenzt wird. In diesem Bereich sei $f(x, y)$ stetig und besitze dort eine Lipschitz-

Konstante. Konstruiert man von einer geeigneten Oberfunktion ausgehend eine Folge von Oberfunktionen, so weiß man, daß diese unter den Voraussetzungen des Satzes 6 gegen die Lösung konvergiert. Das gleiche gilt, wenn man von einer Unterfunktion ausgehend eine Folge von Unterfunktionen konstruiert. Beide Folgen gehen, da $y' = f(x, y)$ zufolge der Lipschitz-Bedingung eine und nur eine Lösung besitzen kann, gegen die Lösung, die Folge der Oberfunktionen von oben her, die der Unterfunktionen von unten her. Man erhält auf diese Weise eine Doppelfolge von Funktionen, durch welche die Lösung eingeschachtelt wird. Ist $U_0, U_1, U_2 \ldots$ die Folge der Oberfunktionen, und $u_0, u_1, u_2, \ldots$ die der Unterfunktionen, dann gilt gleichmäßig in I

$$\lim_{n \to \infty} (U_n - u_n) = 0.$$

Das eben geschilderte Einschachtelungsverfahren machte die Bestimmung zweier getrennter Funktionenfolgen erforderlich, von denen die eine aus einer Ober-, die andere aus einer Unterfunktion gewonnen wurde. Im folgenden zeigen wir, wie man aus einer Ober-(Unter-)funktion allein eine die Lösung einschachtelnde Doppelfolge herstellen kann.

Es sei

$$U_n = U_{n-1} - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h_{n-1}\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

eine unter den Voraussetzungen des Satzes 6 aus einer Oberfunktion U_0 konstruierte Folge von Oberfunktionen. Aus jeder dieser Oberfunktionen U_n läßt sich nach Satz 4 eine Unterfunktion

$$u_n = U_{n-1} - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_{n-1} dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

gewinnen. Über die so erhaltene Doppelfolge gilt der folgende Satz:

Satz 7. *Ist $U_0, U_1, U_2, \ldots$ eine unter den Voraussetzungen des Satzes 6 aus einer Oberfunktion U_0 von $y' = f(x, y)$ konstruierte Folge von Oberfunktionen, so konvergiert die aus ihr nach Satz 4 konstruierte Folge der Unterfunktionen*

$$u_n = U_{n-1} - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_{n-1}\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

in I gleichmäßig gegen die Lösung der Differentialgleichung, vorausgesetzt, daß die erste der Unterfunktionen u_1 in I existiert. Die Folge der Unterfunktionen u_n nimmt mit wachsendem n zu,

$$u_1 \leqq u_2 \leqq \cdots \leqq y \leqq \cdots \leqq U_2 \leqq U_1 \leqq U_0.$$

Beweis. Nimmt man zunächst an, daß alle u_n in I existieren, so folgt aus den beiden Gleichungen

$$U_n = U_{n-1} - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} h_{n-1}\, dt, \quad u_n = U_{n-1} - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_{n-1}\, dt \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$U_n - u_n = 2 \int_{x_0}^{x} h_{n-1} \operatorname{Sin} L(x-t)\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Da die Folge der h_n in I mit wachsendem n gleichmäßig gegen Null geht, gilt

$$\lim_{n \to \infty} (U_n - u_n) = 0,$$

woraus man entnimmt, daß die Folge der Unterfunktionen u_n in I gleichmäßig gegen die Lösung konvergiert.

Bleibt noch zu zeigen, daß alle Unterfunktionen u_n existieren, sobald u_1 existiert. Hierzu weisen wir nach, daß die u_n mit wachsendem n zunehmen. Es ist

$$u_{n+1} - u_n = U_n - U_{n-1} + \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_{n-1} - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_n\, dt,$$

oder, indem man die erste Differenz nach (8) durch ein Integral ersetzt,

$$u_{n+1} - u_n = 2 \int_{x_0}^{x} h_{n-1} \operatorname{Sin} L(x-t)\, dt - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_n dt.$$

Setzt man die rechte Seite von (13) gleich g_n, so folgt wegen $h_n \leq g_n$

$$u_{n+1} - u_n \geqq 2 \int_{x_0}^{x} h_{n-1} \operatorname{Sin} L(x-t)\, dt - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} g_n\, dt.$$

Der Ausdruck rechterhand verschwindet aber identisch in x. Setzt man ihn nämlich G_n, so findet man nach Differentiieren und geeignetem Zusammenfassen

$$G_n' = L G_n.$$

Da G_n an der Stelle $x = x_0$ verschwindet, verschwindet es auf Grund der letzten Gleichung identisch in x. Damit ist gezeigt, daß die Unterfunktionen u_n mit wachsendem n zunehmen. Existiert also u_1 in I — dazu ist hinreichend, daß die Kurve von u_1 für alle x aus I in $\mathfrak{B}$ verläuft —, dann existieren erst recht alle weiteren u_n, w. z. b. w.

Bei der praktischen Durchführung dieser Einschachtelung wird man nicht zu jeder Oberfunktion die entsprechende Unterfunktion bestimmen, sondern die Folge der Oberfunktionen bis zu einem gewissen Glied U_{n-1} berechnen und die zu der Oberfunktion U_{n-1} gehörige Unterfunktion u_n aufsuchen. Dann weiß man, daß die Lösung y in I zwischen U_{n-1} und u_n verläuft.

Wir sind eben bei der Bestimmung der Doppelfolge von einer Oberfunktion ausgegangen, haben eine Folge von Oberfunktionen konstruiert und zu jeder derselben eine Unterfunktion. In entsprechender Weise kann man von einer Unterfunktion ausgehen, aus dieser eine Folge von Unterfunktionen gewinnen und aus jeder derselben nach Satz 4 eine Oberfunktion. Von der Folge dieser Oberfunktionen gilt ein dem Satz 7 entsprechender Satz. Sie nimmt mit wachsendem n ab und geht in I gleichmäßig gegen die Lösung.

Neben den beiden eben geschilderten Möglichkeiten, die Lösung einzuschachteln, gibt es noch eine dritte. Sie beruht ebenso wie die vorige auf der in Satz 4 beschriebenen Konstruktion einer Unter-(Ober-)funktion aus einer Ober-(Unter-)funktion. Es sei B ein konvexer Bereich, in welchem $f(x, y)$ stetig ist und einer Lipschitz-Bedingung genügt. Ferner sei $u_0(x)$ eine durch den Punkt (x_0, y_0) gehende, in einem Intervall I existierende, geeignete Oberfunktion von $y' = f(x, y)$. Dann ist nach Satz 4

$$u_1 = u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)}\, h_0\, dt$$

eine durch (x_0, y_0) gehende Unterfunktion. Mit derselben Konstruktion folgt aus u_1 die Oberfunktion

$$u_2 = u_1 - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)}\, h_1\, dt,$$

daraus weiter die Unterfunktion

$$u_3 = u_2 - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)}\, h_2\, dt,$$

usw. Indem man in dieser Weise unbegrenzt fortfährt, erhält man eine Funktionenfolge $u_0, u_1, u_2, \ldots$, deren Glieder mit geradem Index Ober-, mit ungeradem Index Unterfunktionen sind.

Wir nehmen zunächst wieder an, daß es ein Intervall K gibt, in welchem alle Funktionen dieser Folge existieren. Dann können wir zeigen, daß $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = y(x)$ existiert und gleich der durch (x_0, y_0) gehenden Lösung von $y' = f(x, y)$ ist. Dazu hat man die Konvergenz der Reihe

$$y = u_0 + (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \cdots$$

nachzuweisen. Mit

$$u_n - u_{n-1} = -\int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)}\, h_{n-1}\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{22}$$

erhält man

$$y - u_0 = -\int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)}\, (h_0 + h_1 + h_2 + \cdots)\, dt. \tag{23}$$

Ähnlich wie in § 5 wird man auch hier zeigen, daß die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$ in K absolut und gleichmäßig konvergent ist. Differentiieren von (22) liefert

$$u_n' = f(x, u_{n-1}) - L \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_{n-1}\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots);$$

somit ist

$$h_n = f(x, u_{n-1}) - f(x, u_n) - L \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_{n-1}\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{24}$$

Auf Grund der Lipschitz-Bedingung und der Gleichung (22) ergibt sich hieraus

$$|h_n| \leqq 2L \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} |h_{n-1}|\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Wie in § 5 suchen wir eine Majorante der Reihe $\sum_{n-0}^{\infty} h_n$ auf. Die Glieder dieser Majorante sind durch die Rekursionsformel

$$H_n - 2L \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} H_{n-1}\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

erklärt, wobei $H_0 = h_0$ gesetzt ist. Durch Ableiten der letzten Gleichung kommt

$$H_n' = 2LH_{n-1} + LH_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Unter Benutzung des symbolischen Differentialoperators schreibt sich dieses System

$$(D - L) H_n = 2L H_{n-1},$$

aus ihm folgt

$$(D - L)^n H_n = (2L)^n H_0,$$

und daraus nach denselben Überlegungen wie in § 5

$$H_n = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{L(x-t)} (2L)^n H_0\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{25}$$

Ist μ_0 die obere Grenze von $h_0(x)$ im Intervall I, so gilt demnach

$$H_n \leqq \mu_0 \frac{[2L(x - x_0)]^n}{n!} e^{L(x-x_0)}, \qquad x_0 \leqq x \leqq x_0 + a,$$

womit die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$ nachgewiesen ist. Nach (23) konvergiert somit die Folge der u_n in K gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion, $\lim_{n \to \infty} u_n(x) = y(x)$.

Als Summe der Majorante $\sum_{n=0}^{\infty} H_n$ erhält man

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} H_n = H_0 + 2L \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} \left[1 + \frac{2L(x-t)}{1!} + \frac{[2L(x-t)]^2}{2!} + \ldots\right] H_0 dt$$

oder

$$S = h_0 + 2L \int_{x_0}^{x} e^{3L(x-t)} h_0 dt.$$

In gleicher Weise wie in § 5 zeigt man noch, daß $\lim_{n \to \infty} u_n(x) = y(x)$ Lösung von $y' = f(x, y)$ ist. Da $f(x, y)$ einer Lipschitz-Bedingung genügt, ist sie die einzige Lösung, welche die Gleichung durch den Punkt (x_0, y_0) schickt.

Um den Beweis vollständig zu machen, bleibt noch nachzuweisen, daß es ein Intervall K gibt, in welchem alle u_n existieren. Als K kann man ein Intervall nehmen, in welchem u_0, u_1 und u_2 existieren und $u_0 - u_2 \geqq 0$ ist. Daß es immer ein solches Intervall gibt, kann man so einsehen. Es ist

$$u_0 - u_2 = \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} (h_0 + h_1) dt \geqq \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} (h_0 - H_1)\, dt.$$

Setzt man den Wert von H_1 nach (25) ein, so folgt nach einer leichten Umformung

$$u_0 - u_2 \geqq \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} [1 - 2L(x - t)] h_0\, dt \geqq [1 - 2L(x - x_0)] \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_0\, dt,$$

woraus man abliest, daß $u_0 - u_2$ mindestens im Intervall $x_0 \leqq x \leqq x_0 + \frac{1}{2L}$ nicht negativ ist. In einem solchen Intervall K verlaufen dann die Kurven aller Funktionen u_n in B, und die Folge der Oberfunktionen nimmt dort mit wachsendem n ab, während die der Unterfunktionen zunimmt. In der Tat, nach (23) ist

$$u_1 - u_3 = \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} (h_1 + h_2)\, dt.$$

Da nach (24)

$$h_1 + h_2 = f(x, u_0) - f(x, u_2) - L(u_0 - u_2)$$

und $u_0 - u_2 \geqq 0$ ist, folgt $h_1 + h_2 \leqq 0$ und damit $u_1 - u_3 \leqq 0$. Daraus schließt man in der gleichen Weise weiter, daß $u_2 - u_4 \geqq 0$, $u_3 - u_5 \leqq 0$ usw., womit gezeigt ist, daß die Folge der Oberfunktionen in K mit wachsendem n abnimmt, während die der Unterfunktionen zunimmt. Allgemeiner kann man sagen, daß man für K jedes Intervall nehmen kann, in welchem die Funktionen $u_0, u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}, u_{n+2}$ existieren und die Differenz $u_n - u_{n+2}$ bei geradem (ungeradem) n nicht negativ (positiv) ist.

Ein etwas kleineres, dafür aber einfacher zu bestimmendes Konvergenzintervall liefert die folgende Betrachtung. Man kann zeigen, daß alle Funktionen unserer Folge unter einer gewissen Ober- und über einer gewissen Unterfunktion liegen. Um die Oberfunktion zu bestimmen, schreiben wir (23) in der Form

$$u_n = u_{n+1} + \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)}\, h_n\, dt. \tag{26}$$

Ist n gerade, dann ist u_n eine Ober-, u_{n+1} eine Unterfunktion und $h_n \geqq 0$. Ersetzt man auf der rechten Seite von (26) die Unterfunktion u_{n+1} durch die Oberfunktion u_0 und h_n durch H_n, so folgt

$$u_n \leqq u_0 + \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)}\, H_n\, dt,$$

oder, indem man H_n durch die rechte Seite von (25) ausdrückt,

$$u_n \leqq u_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{[2L(x-t)]^n}{n!}\, e^{L(x-t)}\, h_0\, dt;$$

somit ist erst recht

$$u_n \leqq u_0 + \int_{x_0}^{x} e^{3L(x-t)}\, h_0\, dt.$$

Alle Funktionen u_n liegen also unter der rechten Seite der letzten Ungleichung, von der man leicht zeigt, daß sie eine Oberfunktion von (A) ist.

Ist dagegen n ungerade, also u_n eine Unterfunktion, dann ist u_{n+1} Oberfunktion und $h_n \leqq 0$. Ersetzt man in (26) die Oberfunktion u_{n+1} durch die Unterfunktion u_1 und h_n durch $-H_n$, so kommt

$$u_n \geqq u_0 + (u_1 - u_0) - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)}\, H_n\, dt,$$

oder

$$u_n \geqq u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} \left(1 + \frac{[2L(x-t)]^n}{n!}\right) h_0\, dt;$$

somit gilt erst recht

$$u_n \geqq u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{3L(x-t)}\, h_0\, dt.$$

Alle Funktionen u_n bleiben also oberhalb der rechten Seite dieser Ungleichung, die eine Unterfunktion von (A) ist. Alles zusammengenommen ist damit gezeigt, daß

$$u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{3L(x-t)}\, h_0\, dt \leqq u_n \leqq u_0 + \int_{x_0}^{x} e^{3L(x-t)}\, h_0\, dt \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Daraus schließt man, daß es ein Intervall K gibt, in welchem die Folge der u_n gleichmäßig gegen die Lösung geht. Der rechte Endpunkt von K ergibt sich hier nach denselben Überlegungen, wie wir sie zur Bestimmung des Konvergenzintervalls des Picardschen Verfahrens beim Beweis von Satz 1 benutzt haben. Man hat dabei nur Y mit

$$\int_{x_0}^{x} e^{3L(x-t)} h_0 \, dt$$

zu identifizieren.

Anstatt von einer Oberfunktion auszugehen, kann man das Verfahren auch mit einer Unterfunktion beginnen. Man erhält dann eine Funktionenfolge, bei welcher die Glieder mit geradem Index Unter-, die mit ungeradem Index Oberfunktionen sind. Der Beweis für die Konvergenz der so erhaltenen Funktionenfolge ist Schritt für Schritt beinahe derselbe wie eben. Die Schranken, zwischen denen alle Funktionen der Folge verlaufen, sind hier gegeben durch

$$u_0 + \int_{x_0}^{x} e^{3L(x-t)} h_0 \, dt \leqq u_n \leqq u_0 - \int_{x_0}^{x} e^{3L(x-t)} h_0 \, dt.$$

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 8. *Ist $u_0(x)$ eine durch den Punkt (x_0, y_0) gehende, in einem Intervall I existierende geeignete Ober-(Unter-)funktion von $y' = f(x, y)$, und konstruiert man von u_0 ausgehend die Funktionenfolge*

$$u_n = u_{n-1} - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} h_{n-1} \, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

mit

$$h_n = u_n' - f(x, u_n) \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

dann gibt es ein Intervall K, in welchem die Folge der u_n gleichmäßig gegen die durch (x_0, y_0) gehende Lösung von $y' = f(x, y)$ konvergiert. Bei dieser Folge sind die Glieder mit geradem Index Ober-(Unter-)funktionen, die mit ungeradem Unter-(Ober-)funktionen. Als K kann man entweder ein Intervall nehmen, in welchem u_0, u_1 und u_2 existieren und die Differenz $u_0 - u_2$ positiv (negativ) ist, oder allgemeiner eines, in welchem $u_0, u_1, \ldots, u_{n+2}$ existieren und die Differenz zweier aufeinanderfolgender Ober- bzw. Unterfunktionen $u_n - u_{n+2}$ positiv bzw. negativ ist, oder eines, in welchem die beiden Schranken

$$u_0 \pm \int_{x_0}^{x} e^{3L(x-t)} h_0 \, dt$$

existieren.

Zu diesem Satz zwei Beispiele.

Beispiel 7. Wir zeigen am Beispiel der Gleichung $y' = |\sqrt{x^2 + y^2}|$, wie man die durch den Anfangspunkt gehende Lösung für positives x nach dem in Satz 8 geschilderten Verfahren einschachteln kann. Hier ist $\frac{\partial f}{\partial y}$ in der ganzen x, y-Ebene beschränkt, $L = 1$. Bei der Aufstellung der die Lösung einschachtelnden Funktionenfolge gehen wir von der Unterfunktion $u_0(x) = 0$ aus. Mit $h_0 = -x$ erhält man als nächste Näherung die Oberfunktion

$$u_1 = \int_0^x e^{x-t} t \, dt = e^x - 1 - x,$$

daher

$$0 \leqq y \leqq e^x - 1 - x.$$

Das Verfahren konvergiert hier für alle positiven x, denn alle u_n liegen zwischen den Schranken

$$-\tfrac{1}{9}(e^{3x} - 1 - 3x) \leqq u_n \leqq \tfrac{1}{9}(e^{3x} - 1 - 3x).$$

Beispiel 9. Es soll die durch den Anfangspunkt gehende Lösung der schon mehrfach behandelten Riccatischen Gleichung $y' = x - y^2$ für positives x eingeschachtelt werden. Eine Unterfunktion ist $u_0 = 0$. Da $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$ ist, kann man in dem Gebietsstreifen $x \geqq 0$, $|y| \leqq 1$ die Lipschitz-Konstante $L = 2$ setzen. Als Schranken der u_n erhält man mit $h_0 = -x$

$$\pm \int_0^x e^{6(x-t)} t \, dt = \pm \tfrac{1}{36}(e^{6x} - 1 - 6x).$$

Die u_n existieren demnach in einem Intervall K, in welchem diese Schranken den Betrag 1 nicht überschreiten. Dies ist der Fall für $0 \leqq x \leqq 0{,}19$.

Als nächste Näherung bekommt man die Oberfunktion

$$u_1 = \int_0^x e^{2(x-t)} t \, dt = \tfrac{1}{4}(e^{2x} - 1 - 2x).$$

Sie erreicht den Wert 1 für $x = 0{,}97$ und existiert daher im Intervall $0 \leqq x \leqq 0{,}97$. Aus u_1 ergibt sich der Fehler

$$h_1 = \tfrac{1}{2}(e^{2x} - 1) - x + \tfrac{1}{16}(e^{2x} - 1 - 2x)^2,$$

und damit

$$h_0 + h_1 = \tfrac{1}{2}(e^{2x} - 1) - 2x + \tfrac{1}{16}(e^{2x} - 1 - 2x)^2.$$

Wir suchen nun ein Intervall auf, in welchem $u_2 - u_0 = u_2 \geqq 0$ ist. Das ist sicherlich der Fall, solange $h_0 + h_1 \leqq 0$ ist. Da

$$h_0 + h_1 \leqq \tfrac{1}{2}(e^{2x} - 1) - 2x,$$

ist $h_0 + h_1$ sicherlich nicht positiv, wenn es die rechte Seite nicht ist. Diese wechselt ihr Vorzeichen für $x = 0.63$. Damit haben wir ein größeres Konvergenzintervall gewonnen. Ein noch größeres erhält man, wenn man die Stelle bestimmt, an welcher u_2 sein Vorzeichen wechselt.

Wie das Beispiel zeigt, ist das mit Satz 6 beschriebene Verfahren der schrittweisen Näherungen dem des letzten Satzes überlegen. Beim ersteren konvergiert das Verfahren für alle positiven x, während beim letzteren der Konvergenznachweis nur für ein kleineres Intervall gelingt.

§ 9.

Über das Picardsche Verfahren.

Das eben beschriebene Verfahren und das Picardsche weisen insofern eine gewisse Ähnlichkeit auf, als man bei ihnen im allgemeinen nur ein kleines Konvergenzintervall angeben kann. Bei beiden tritt auch die bekannte Erscheinung auf, daß es ein größtes Konvergenzintervall gibt. Untersucht man nämlich die Länge des Konvergenzintervalls in Abhängigkeit von der Breite b des Gebietsstreifens, so findet man, daß die Länge des Konvergenzintervalls zunächst mit der Breite des Gebietsstreifens zunimmt, bis sie einen größten Wert erreicht, um dann mit wachsender Breite abzunehmen.

Wenn auch das Picardsche Verfahren im allgemeinen nicht unmittelbar Folgen von Ober- oder Unterfunktionen liefert, so kann man sich doch mit seiner Hilfe eine Folge von Ober- und Unterfunktionen verschaffen, durch welche die Lösung eingeschachtelt wird. Es gilt da folgender Satz:

Satz 9. *Ist $u_0(x)$ eine durch den Punkt (x_0, y_0) gehende, in einem Intervall I erklärte geeignete Ausgangsfunktion, dann gibt es ein Intervall K, in welchem die Picardsche Funktionenfolge*

$$u_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u_{n-1})\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

gleichmäßig gegen die Lösung von $y' = f(x, y)$ geht, und die mit dem Fehler

$$h_n = u_n' - f(x, u_n) = f(x, u_{n-1}) - f(x, u_n)$$

gebildete Funktionenfolge

$$V_n = u_n + \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} |h_n(t)|\, dt \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

eine mit wachsendem n abnehmende Folge von Oberfunktionen darstellt, während

$$v_n = u_n - \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} |h_n(t)|\, dt \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

eine zunehmende Folge von Unterfunktionen darstellt. Die beiden letzten Folgen gehen in K gleichmäßig gegen die durch (x_0, y_0) gehende Lösung von $y' = f(x, y)$, liefern somit eine Einschachtelung der Lösung. Das Konvergenzintervall K ist dasselbe wie in Satz 1.

Beweis. Aus

$$h_n = u_n' - f(x, u_n) = f(x, u_{n-1}) - f(x, u_n) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

schließt man

$$|h_n| \leqq L\,|u_n - u_{n-1}| \leqq L^n \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,|h_0(t)|\,dt \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

wo die letzte Ungleichung aus den Entwicklungen in § **1** folgt. Daraus entnimmt man, daß die Folge der h_n in K mit wachsendem n gleichmäßig gegen Null geht. Daß die V_n Ober- und die v_n Unterfunktionen von $y' = f(x, y)$ sind, folgt in derselben Weise, wie dies für V und v in § **3** gezeigt wurde. Man hat dort nur überall den Index n an V und v anzuhängen. Damit hat man eine Folge von Oberfunktionen V_n und eine von Unterfunktionen v_n, durch welche die Lösung eingeschachtelt wird. Denn beide Folgen konvergieren, da die h_n in K gleichmäßig gegen Null und die u_n gleichmäßig gegen die Lösung gehen, in K gleichmäßig gegen die Lösung, die erstere von „oben", die letztere von „unten" her.

Bleibt noch zu zeigen, daß die V_n mit wachsendem n abnehmen. Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir $|h_n(x)| = H_n(x)$. Dann ist zu beweisen, daß

$$V_n - V_{n+1} = u_n - u_{n+1} + \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)}\,[H_n(t) - H_{n+1}(t)]\,dt \geqq 0.$$

Nach § **1** ist

$$H_{n+1} \leqq L|u_{n+1} - u_n| = L\int_{x_0}^{x} H_n\,dt = G_{n+1}.$$

Damit wird

$$V_n - V_{n+1} \geqq \int_{x_0}^{x} (h_n + H_n)\,dt + \Big[\int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)}(H_n - G_{n+1})\,dt - \int_{x_0}^{x} H_n\,dt\Big].$$

Der in eckige Klammern gesetzte Ausdruck verschwindet aber identisch in x, denn seine Ableitung ist gleich dem mit L multiplizierten Ausdruck, und dieser verschwindet an der Stelle $x = x_0$. Daher

$$V_n - V_{n+1} \geqq \int_{x_0}^{x} (h_n + |h_n|)\,dt \geqq 0,$$

woraus man abliest, daß die Oberfunktionen V_n mit wachsendem n abnehmen.

In entsprechender Weise zeigt man, daß die Unterfunktionen v_n mit wachsendem n zunehmen, womit der Satz bewiesen ist.

Wie bekannt, liefert das Picardsche Verfahren unter geeigneten Monotonievoraussetzungen über $f(x, y)$ unmittelbar Folgen von Ober- oder Unterfunktionen. Über die Erzeugung solcher Folgen gibt der folgende Hilfssatz Auskunft.

Hilfssatz. *Ist die rechte Seite der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ in der Umgebung des Punktes (x_0, y_0) stetig und $u_0(x)$ eine durch (x_0, y_0) gehende in einem Intervall I existierende geeignete Ober-(Unter-)funktion von $y' = f(x, y)$, deren Fehler dort fast überall positiv (negativ) ist, dann ist die nach Picard konstruierte nächste Näherung*

$$u_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u_0)\, dt,$$

sofern sie ebenfalls in I existiert, eine verbesserte Ober-(Unter-)funktion, wenn $f(x, y)$ in der Umgebung von (x_0, y_0) mit wachsendem y monoton zunimmt. Nimmt dagegen $f(x, y)$ monoton ab, so ist u_1 eine Unter-(Ober-)funktion.

Beweis. Nimmt $f(x, y)$ mit wachsendem y monoton zu, und ist $u_0(x)$ eine Oberfunktion mit den geforderten Eigenschaften, $y(x)$ irgendeine durch (x_0, y_0) gehende Lösung von (A), so hat man in I zunächst $u_0 \geqq y$. Ist I so gewählt, daß die nach Picard gebildete nächste Näherung

$$u_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u_0)\, dt = u_0 - \int_{x_0}^{x} h_0\, dt$$

in I existiert, so gilt $u_1 < u_0$ für $x > x_0$, denn nach Voraussetzung ist h_0 in I fast überall positiv, d. h. es soll dort nur in einer endlichen Anzahl isolierter Punkte verschwinden. Hier ist aber u_1 eine verbesserte Oberfunktion, denn der Fehler von u_1

$$h_1 = f(x, u_0) - f(x, u_1)$$

ist für $x > x_0$ positiv, und es ist $u_1 \geqq y$, da

$$u_1 - y = \int_{x_0}^{x} [f(t, u_0) - f(t, y)]\, dt.$$

Damit ist gezeigt, daß das Picardsche Verfahren in diesem Fall eine verbesserte Oberfunktion liefert. Ebenso zeigt man, daß unter den gleichen Bedingungen aus einer Unterfunktion u_0 eine verbesserte Unterfunktion u_1 erzeugt wird.

Nimmt dagegen $f(x, y)$ mit wachsendem y monoton ab, und ist u_0 wieder eine Oberfunktion, dann ist in I wieder $u_0 \geqq y$ und wie eben $u_1 < u_0$ für $x > x_0$. Hier ist aber u_1 eine Unterfunktion, denn der Fehler von u_1

$$h_1 = f(x, u_0) - f(x, u_1)$$

ist für $x > x_0$ negativ, und es ist $u_1 \leqq y$, da

$$u_1 - y = \int_{x_0}^{x} [f(t, u_0) - f(t, y)]\, dt,$$

und $f(x, y)$ mit wachsendem y monoton abnimmt.

Ebenso folgt, daß u_1 eine Oberfunktion ist, wenn u_0 eine Unterfunktion ist.

Über die Picardsche Funktionenfolge, die auftritt, wenn $f(x, y)$ mit wachsendem y monoton zunimmt, hat I. Bendixson [17]) einen Satz bewiesen, der später von M. Müller [18]) richtiggestellt wurde.

Satz von Bendixson-Müller. *In der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ sei $f(x, y)$ in der Umgebung des Punktes (x_0, y_0) stetig und die Gleichung besitze eine durch (x_0, y_0) gehende, in einem Intervall I: $x_0 \leqq x \leqq x_0 + a$ existierende geeignete Oberfunktion $U_0(x)$, deren Fehler dort fast überall positiv ist; $u_0(x)$ sei eine in demselben Intervall existierende, ebenfalls durch (x_0, y_0) gehende geeignete Unterfunktion, deren Fehler dort fast überall negativ ist. In dem durch die Vertikale $x = x_0 + a$ und die Kurven von $U_0(x)$ und $u_0(x)$ begrenzten Bereich $\mathfrak{B}$ sei $f(x, y)$ stetig und nehme dort mit wachsendem y monoton zu. Dann ist die aus der Oberfunktion $U_0(x)$ erzeugte Picardsche Funktionenfolge*

$$U_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, U_{n-1})\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

eine mit wachsendem n monoton abnehmende Folge von Oberfunktionen, die in I gleichmäßig gegen eine Lösung von $y' = f(x, y)$ geht. Die aus der Unterfunktion $u_0(x)$ erzeugte Folge ist eine monoton zunehmende von Unterfunktionen, die ebenfalls gegen eine Lösung von $y' = f(x, y)$ geht.

Beweis. Da $f(x, y)$ in der Umgebung von (x_0, y_0) stetig ist, lassen sich nach den in § 3 unter 1. und 2. beschriebenen Verfahren je eine Ober- und Unterfunktion $U_0(x)$ und $u_0(x)$ von der im Satz angegebenen Art konstruieren. Bei der Beweisführung wollen wir uns auf die aus der Oberfunktion $U_0(x)$ erzeugte Folge von Oberfunktionen beschränken. In dem Bereich $\mathfrak{B}$ ist $f(x, y)$ beschränkt, $|f(x, y)| \leqq M$. Nach unseren Voraussetzungen existieren alle U_n im Intervall I. Bleibt zu beweisen, daß die Folge der U_n in I gleichmäßig konvergent ist. Da

$$|U_n(x') - U_n(x)| = \left| \int_{x}^{x'} f(t, U_{n-1})\, dt \right| \leqq M |x' - x|,$$

[17]) I. Bendixson, Sur la convergence uniforme des séries, Ofversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897, S. 605; vgl. auch P. Painlevé, Enzykl. d. Math. Wiss., Bd. II, 1. Teil, 1. Hälfte, S. 200.

[18]) M. Müller, Math. Zeitschr. **26** (1927), S. 619, insbes. S. 623.

sind die U_n in I gleichmäßig stetig. Nunmehr unterteilen wir das Intervall I durch die Punkte

$$x_0 = X_0, X_1, X_2, \ldots, X_k = x_0 + a$$

in k Teilintervalle, deren Längen unter einer beliebig klein vorgegebenen positiven Zahl ε bleiben. Dann gibt es immer ein X_i, das sich von einem beliebigen x aus I um weniger als ε unterscheidet. In

$$U_{n+p}(x) - U_n(x) = U_{n+p}(x) - U_{n+p}(X_i) + U_{n+p}(X_i) - U_n(X_i) + \\ + U_n(X_i) - U_n(x)$$

kann man aber $U_{n+p}(X_i) - U_n(X_i)$ durch Wahl eines hinreichend großen Wertes von n kleiner als ε machen, denn die Zahlenfolge der $U_n(X_i)$ besitzt, da sie monoton abnimmt und nach unten beschränkt ist, einen Grenzwert.

Damit ergibt sich

$$|U_{n+p}(x) - U_n(x)| < \varepsilon M + \varepsilon + \varepsilon M = \varepsilon(1 + 2M).$$

Infolgedessen konvergiert die Folge der $U_n(x)$ in I gleichmäßig gegen eine stetige Grenzfunktion. Von dieser zeigt man in der üblichen Weise, daß sie eine Lösung von $y' = f(x, y)$ ist, womit der Satz für die Folge der Oberfunktionen bewiesen ist. Der Beweis für die Folge der Unterfunktionen verläuft entsprechend.

Der folgende Satz bezieht sich auf die Picardsche Funktionenfolge, die man erhält, wenn $f(x, y)$ mit wachsendem y monoton abnimmt. Er ist ein Gegenstück zu dem Satz von Bendixson-Müller.

Satz 10. *Es sei B ein konvexer Bereich, in welchem die rechte Seite der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ stetig ist und mit wachsendem y monoton abnimmt. Ferner sei $u_0(x)$ eine durch den Punkt (x_0, y_0) gehende in einem Intervall I existierende geeignete Ober-(Unter-)funktion von $y' = f(x, y)$, deren Fehler in I fast überall positiv (negativ) ist. Konstruiert man von $u_0(x)$ ausgehend die Picardsche Funktionenfolge*

$$u_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u_{n-1})\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

und gibt es ein Intervall K, in welchem u_0, u_1 und u_2 existieren und $u_0 - u_2$ fast überall positiv (negativ) ist, oder alle Glieder bis zur Ober-(Unter-)funktion u_{n+2} hin existieren und $u_n - u_{n+2}$ fast überall positiv (negativ) ist, dann konvergiert die Teilfolge der Oberfunktionen mit wachsendem n monoton abnehmend gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion und die der Unterfunktionen mit wachsendem n

monoton zunehmend ebenfalls gegen eine Grenzfunktion. Sind die beiden Grenzfunktionen dieselben — dies ist der Fall, wenn gleichmäßig in K $\lim_{n \to \infty} (u_n - u_{n+1}) = 0$ *ist —, so stellen diese die einzige Lösung dar, welche* $y' = f(x, y)$ *besitzt.*

Beweis. Den Beweis führen wir unter der Annahme durch, daß $u_0(x)$ eine Oberfunktion ist. Nachdem man die Funktionen u_1 und u_2 nach Picard konstruiert hat, sucht man ein Intervall K auf, in welchem diese Funktionen existieren und die Differenz $u_0 - u_2$ mit Ausnahme einer endlichen Anzahl isolierter Punkte, in denen sie verschwindet, positiv ist. Dann folgt aus

$$u_3 - u_1 = \int_{x_0}^{x} [f(t, u_2) - f(t, u_0)]\, dt,$$

da $f(x, y)$ nach Voraussetzung mit wachsendem y monoton abnimmt, $u_3 \geqq u_1$, wobei die Gleichheit nur an der Stelle x_0 eintritt. Damit schließt man aus

$$u_4 - u_2 = \int_{x_0}^{x} [f(t, u_3) - f(t, u_1)]\, dt,$$

daß $u_4 \leqq u_2$ ist. Indem man in dieser Weise weiterfährt, erkennt man, daß die Folge der Oberfunktionen (n gerade) in K mit wachsendem n monoton abnimmt, während die der Unterfunktionen (n ungerade) monoton zunimmt. Alle u_n ($n = 2, 3, \ldots$) verlaufen somit für alle x aus K in dem durch die Kurven von u_0 und u_1, sowie die Vertikale $x = x_0 + \delta$ begrenzten Bereich $\mathfrak{B}$. Da $f(x, y)$ in $\mathfrak{B}$ stetig und damit beschränkt ist, sind die u_n in K gleichmäßig stetig. Für die monoton abnehmende Folge der Oberfunktionen folgt daraus in gleicher Weise wie bei dem Beweis des vorigen Satzes, daß sie in K gleichmäßig konvergent ist. Das gleiche gilt von der Folge der Unterfunktionen. Konvergieren beide Folgen gegen ein und dieselbe Grenzfunktion, das ist der Fall, wenn in K gleichmäßig $\lim_{n \to \infty} (u_n - u_{n+1}) = 0$ ist, dann läßt sich von dieser in der üblichen Weise zeigen, daß sie eine Lösung von $y' = f(x, y)$ ist. Daß dies die einzige Lösung ist, beweist man indirekt. Angenommen, es gäbe zwei Lösungen, sie seien Y und y, und es sei für hinreichend kleines positives $x - x_0$ immer $Y > y$. Dann ergibt sich aus

$$Y' - y' = f(x, Y) - f(x, y),$$

da $f(x, y)$ mit wachsendem y monoton abnimmt, für hinreichend kleines positives $x - x_0$

$$Y' - y' < 0$$

und damit $Y < y$, wodurch der Widerspruch hergestellt ist. Damit ist der Beweis für den Fall erbracht, daß u_0 eine Oberfunktion ist. Der Beweis für den Fall, daß u_0 eine Unterfunktion ist, verläuft entsprechend.

Ein Konvergenzintervall, das größer sein kann als das eben angegebene (vgl. Beispiel 10), erhält man in folgender Weise. Man sucht ein Intervall auf, in welchem alle Glieder der Picardschen Folge bis zur Ober-(Unter-)funktion u_{n+2} hin existieren und die Differenz $u_n - u_{n+2}$ positiv (negativ) ist. In dem so definierten Intervall konvergieren offenbar die beiden Teilfolgen ebenfalls gleichmäßig. Damit ist der Satz in allen Teilen bewiesen.

Beispiel 9. Als erstes Beispiel nehmen wir die Gleichung $y' = x - |\sqrt{y}|$, und bestimmen deren durch den Anfangspunkt gehende Lösung, wobei wir von der Unterfunktion $u_0 = 0$ ausgehen. Wir erhalten dann nach Picard

$$u_0 = 0, \quad u_1 = \frac{1}{2}x^2, \quad u_2 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{x^2}{2},$$

allgemein

$$u_n = C_n x^2.$$

Die u_n mit geradem Index sind Unterfunktionen, die mit ungeradem Oberfunktionen. Beide Folgen konvergieren nach dem letzten Satz für alle $x > 0$, denn es ist für positives x

$$u_2 - u_0 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{x^2}{2} > 0.$$

Sie gehen in jedem endlichen Intervall gleichmäßig gegen ein und dieselbe Grenzfunktion, nämlich $y = \frac{x^2}{4}$, welches die einzige Lösung unserer Gleichung ist. In der Tat, setzt man

$$C_n = \tfrac{1}{4}(1 + c_n),$$

so erhält man aus der für die C_n gültigen Rekursionsformel $C_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{C_n})$

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{1 - \sqrt{1 + c_n}}{c_n}.$$

Der Betrag der rechten Seite ist aber für $|c_n| < 1$ immer kleiner als 1. Daher ist $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = 0$ und $\lim\limits_{n \to \infty} C_n = \frac{1}{4}$, w. z. b. w.

Beispiel 10. Wir wollen die durch den Anfangspunkt gehende Lösung der Riccatischen Gleichung $y' = x - y^2$ bestimmen. Als Ausgangsfunktion nehmen wir die Unterfunktion $u_0 = 0$. Dann erhält man nach Picard

$$u_1 = \frac{1}{2}x^2, \quad u_2 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20}, \quad u_3 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} - \frac{x^{11}}{4400}, \quad \text{usw.}$$

Die u_n mit geradem Index sind Unterfunktionen, die mit ungeradem Index Oberfunktionen. Zur Bestimmung des Konvergenzintervalls untersuchen wir zunächst die Differenz $u_2 - u_0$. Aus

$$u_2 - u_0 = \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^3}{10}\right)$$

schließt man, daß diese Differenz im Intervall $0 \leqq x \leqq \sqrt[3]{10}$ fast überall positiv ist. In diesem Intervall konvergiert somit jede der beiden Teilfolgen gleichmäßig. Da die rechte Seite unserer Gleichung überdies einer Lipschitz-Bedingung genügt, gehen beide Teilfolgen gegen dieselbe Grenzfunktion, welche die Lösung unserer Gleichung ist.

Ein größeres Konvergenzintervall erhält man mit der nächsten Differenz

$$u_1 - u_3 = \frac{x^5}{20}\left(1 - \frac{x^3}{8} + \frac{x^6}{220}\right).$$

Da sie für $x > 0$ ihr Vorzeichen nicht wechselt, geht die Folge der u_n in jedem Intervall $0 \leqq x \leqq a$ mit endlichem a gleichmäßig gegen die Lösung unserer Gleichung. Daran erkennt man wieder, inwiefern beim Picardchen Verfahren die Länge des Konvergenzintervalls von der Güte abhängt, mit welcher die Ausgangsfunktion die Lösung annähert.

(Eingegangen am 4. Januar 1942.)

Methoden und Probleme der dynamischen Meteorologie

Von

H. Ertel

(„Ergebnisse der Mathematik", Band V, Heft 3)

Mit 14 Figuren. IV, 122 Seiten. 1938. RM 14.—

Inhaltsverzeichnis: Einleitung. — **I. Thermo-Hydrodynamische Grundlagen.** Zusammensetzung der Atmosphäre. Die Zustandsgleichung der Gase. Die Hauptsätze der Thermodynamik. Thermodynamische Gleichgewichtsbedingungen; charakteristische thermodynamische Funktionen (thermodynamische Potentiale). Spezielle thermodynamische Zustandsänderungen; Polytropen; Kreisprozesse. Thermodynamik feuchter Luft. Exkurs über Strahlung. Die Grundgleichungen der Hydrodynamik. — **II. Allgemeine Dynamik der Atmosphäre.** Hydrodynamische Gleichungen in rotierenden Koordinatensystemen. Die Gleichungen der „ausgeglichenen" Bewegungen; Turbulenzreibung. Geopotential; Druck-, Massen- und Stromfeld. Das Zirkulationstheorem von V. Bjerknes. Das Variationsprinzip der atmosphärischen Dynamik. Atmosphärische Energetik. — **III. Spezielle Dynamik der Atmosphäre.** Grundgleichungen der atmosphärischen Statik. Polytrope Atmosphären. Stabilitätskriterien. Labilitätsprobleme. Die Theorien zur Erklärung der mittleren geometrischen Temperaturzustandskurve. Quasistatische Zustandsänderungen. Stationäre Windfelder. Stationäre Diskontinuitäten in der Atmosphäre. Die atmosphärischen Störungsgleichungen. Geostrophische Gleichgewichtsbedingung und nichtstationäre Bewegungen.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN

Mathematik der Lebensversicherung

Vorlesungen

von

Dr. Alfred Berger

a. o. Professor an der Universität in Wien

VII, 275 Seiten. 1939. RM 24.—; Ganzleinen RM 25.80

SPRINGER-VERLAG · WIEN

Atlas typischer Nebelkammerbilder

mit Einführung in die Wilsonsche Methode

Von

Dozent Dr. W. Gentner Dr. H. Maier-Leibnitz

Professor Dr. W. Bothe

(Institut für Physik im Kaiser-Wilhelm-Institut für medizinische Forschung, Heidelberg)

Mit 18 Figuren und 125 Aufnahmen. V, 125 Seiten. 1940
RM 21.60; Ganzleinen RM 25.80

Inhaltsübersicht:

Erster Teil: **Die Wilsonsche Nebelkammer.** Vorgeschichte der Wilsonkammer. — Theoretische Grundlagen. — Die Sichtbarmachung von Teilchenbahnen mit der Nebelkammer. — Weitere Entwicklung der Nebelkammertechnik. — Anhang: Allgemeines über Strahlenarten. — Literaturverzeichnis.

Zweiter Teil: **Nebelkammerbilder.** α-Strahlen. — β-Strahlen. — Das Positron. — Röntgenstrahlen. — γ-Strahlen. — Kernumwandlungen durch geladene Teilchen. — Das Neutron. — Die Spaltung des Urans. — Die künstliche Radioaktivität. — Einzelne Ultrastrahlen. — Kaskadenschauer. — Teilchenarme Schauer. — Luftschauer. — Explosionsschauer.

Aus den ersten Besprechungen:

Es war eine glückliche Idee, gerade im gegenwärtigen Augenblick eine Schrift über die Wilsonsche Nebelkammer mit erläuterten Nebelkammerbildern herauszubringen. Verdankt doch gerade die Kernphysik, die sich immer noch im Zustande stürmischer Entwicklung befindet, der Wilsonschen Methode die wertvollsten Entdeckungen. In der Tat ist die Nebelkammer das einzige Instrument, das mit dem Nachweis elementarer Teilchen auch die Festlegung des Ladungssinnes und der Bahnspur verknüpft.
Das Buch gehört zu denen, die man erst aus der Hand legt, wenn man sie von Anfang bis zu Ende durchgelesen hat. Die 42 Seiten des I. Teiles sind dem Aufbau und dem Zubehör der Wilsonkammer selbst gewidmet. Gleich die Einführung ist packend, wenn man die Vorgeschichte der Nebelkammer erfährt und dabei wieder einmal die alte Wahrheit bestätigt findet, daß nicht blinder Zufall, sondern jahrzehntelange geduldige Beschäftigung mit einer rein wissenschaftlichen Fragestellung zu einer schönen Entdeckung geführt haben, ohne daß Wilson sich etwa von vornherein die Aufgabe gestellt hätte, eine Vorrichtung zur Sichtbarmachung radioaktiver Teilchen und einzelner Atome zu erfinden.
Im II. Teil, der 80 Seiten umfaßt, werden ausgewählte Nebelbilder von α- und β-Strahlen, Positronen, Röntgenstrahlen, γ-Strahlen, Neutronen, künstlichen Kernumwandlungen und Höhenstrahlen samt den merkwürdigen Schauererscheinungen wiedergegeben und besprochen. Die Erläuterungen der Bilder sind erschöpfend und doch Muster an Einfachheit, Klarheit und eindringlicher Kürze. Zusammen mit der hervorragend schönen Wiedergabe der Bilder leistet dieses Buch viel mehr, als der Titel erwarten läßt. Wir haben hier eine Einführung in die experimentelle Kernphysik vor uns, die schon lange ein Bedürfnis war und nicht nur den Spezialisten, sondern überhaupt den Physikern aller Richtungen und den physikalisch interessierten Chemikern hochwillkommen sein wird. Sorgfältige und umfassende Literaturangaben werden das Buch besonders denen ganz unentbehrlich machen, die sich in das Wilsonsche Nebelkammerverfahren einarbeiten wollen.

Professor Clusius, München, in „Die Naturwissenschaften"

S P R I N G E R – V E R L A G · B E R L I N

Springer-Verlag in Berlin W 9 — Verantwortlich für den Anzeigenteil: Albert Meyer, Berlin-Steglitz, Kühlebornweg 5 — Druck von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig
Printed in Germany